Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0757.02.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ КУРС

ЮНИТА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МОСКВА 2001

Разработано Д.Х.Керимовой

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: МАТЕМАТИКА. БАЗОВЫЙ КУРС

Юнита 1. Элементы математической логики. Теория множеств. Функции.
Юнита 2. Элементы векторной алгебры. Аналитическая геометрия.
Юнита 3. Основы математического анализа.
Юнита 4. Краткий курс теории вероятностей.

ЮНИТА 2

Содержится материал, включающий основные понятия геометрии Евклида и аналитической геометрии, некоторые сведения из теории множеств и элементы векторной алгебры. Комплектуется файлом материалов.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

ISBN 5-8323-0056-4

0757.009.02.99.01;1/05.13.Тир.42000

© СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 1999

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 6
ВВЕДЕНИЕ 6
ГЛАВА I. Элементы теории множеств 7
§1. Понятие множества 7
§2. Операции над множествами 8
§3. Понятие функции 9
§4. Способы задания функции 10
ГЛАВА II. Элементы векторной алгебры 10
§1. Скалярные и векторные величины 10
§2. Линейные операции над векторами 12
§3. Проекция вектора на ось 14
§4. Прямоугольная система координат в пространстве 14
§5. Разложение вектора по ортам в пространстве 15
§6. Операции над векторами, заданными в координатной форме 16
§7. Скалярное произведение двух векторов 18
§8. Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме . 19
§9. Угол между векторами 20
§10. Понятие арифметического n-мерного пространства 21
Глава III. Элементы аналитической геометрии 23
§1. Система координат 23
§2. Линии и их уравнения 25
§3. Прямая линия 25
§4. Кривые второго порядка 35
ГЛАВА IV. Плоскость и прямая в пространстве. Основные понятия 41
§1. Плоскость 41
§2. Прямая линия 43
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 47
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 51
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 55
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 65
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Предмет и метод аналитической геометрии. Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория. Декартова и полярная системы координат. Линии и их уравнения. Геометрический смысл уравнения. Порядок алгебраических кривых и поверхностей. Прямая линия на плоскости. Кривые второго порядка. Прямая и плоскость в пространстве. Неевклидова геометрия, геометрия микро- и макромира. Скалярные и векторные величины. Линейные операции над векторами. Элементы теории множеств.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М., 1973.
2. Дюбюк П.Е. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. М., 1965.

Дополнительная

3. Выгодский В.К. Справочник по элементарной математике. М., 1979.
4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М., 1963.
5. Марков В.К. Метод координат и задачи с параметрами. М., 1970.
6. Справочник по математике для экономистов. /Под ред. проф. В.И. Ермакова. М., 1987.
7. Лихолетов И.И., Мацкевич И.Н. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск, 1969.
8. Пискунов Н.К. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1960.
9. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1987.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия - часть математики, первоначальным предметом которой являются пространственные отношения и формы тел.

Свои первоначальные шаги геометрия делала как физическая наука, ее первые результаты описывали свойства физически наблюдаемых величин. Затем, до 2-й половины XIX в., предметом геометрии были отношения и формы тел пространства, свойства которого определялись аксиомами, сформулированными Евклидом. Пространство Евклида столь хорошо отражает простейшие физические наблюдения, что до XIX в. оно как бы отождествлялось с физическим пространством.

В XIX в. появились неевклидовы геометрии – геометрические системы, отличные от геометрии Евклида.

В 1826 г. Н.И. Лобачевский построил геометрию (геометрия Лобачевского), которая вводится на основе тех же аксиом, что и евклидова, за исключением только одной аксиомы о параллельных прямых.

Согласно аксиоме о параллельных евклидовой геометрии, через точку, не лежащую на данной прямой L, проходит точно одна прямая, которая лежит в одной плоскости с прямой L и не пересекает эту прямую. В геометрии Лобачевского принимается, что таких прямых более одной (затем доказывается, что их бесконечно много).

В геометрии Лобачевского сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых.

Геометрия Лобачевского есть логически непротиворечивая геометрия, существенно отличная от евклидовой, которая является ее предельным случаем.

В некоторых отношениях противоположна геометрии Лобачевского геометрия Римана, которая в то же время служит ей необходимым дополнением. В геометрии Римана принимается аксиома: каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных. В частности, в геометрии Римана сумма углов любого треугольника больше двух прямых.

После создания геометрий Лобачевского и Римана стало ясно, что в математике возможно построение разнообразных пространств с содержательной геометрией в соответствии с системой аксиом, положенной в их основу.

При исследовании физического пространства выбор подходящего математического пространства зависит от характера объекта. Качество такого математического моделирования проверяется опытом.

Геометрией макромира является евклидова, а микромира – неевклидовы геометрии. В общей физической теории пространства - времени - тяготения используется одна из разновидностей римановой геометрии.

---

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§1. Понятие множества

Понятие «множество» – одно из первичных (неопределимых) понятий математики.

Можно, например, говорить о множестве стульев в аудитории: множестве китов в Гренландии; множестве букв русского алфавита; множестве целых чисел.

Синонимами к термину «множества» являются употребляемые в повседневной практике слова «совокупность», «коллекция», «собрание». Можно сказать, что множество – это набор некоторых объектов произвольной природы, объединенных по каким-то общим для них признакам. Объекты, из которых состоит множество, называются его **элементами (точками).** Множества чаще всего обозначаются прописными буквами латинского алфавита, элементы множеств – строчными буквами. Если объект a принадлежит множеству A, то это записывается так:

$a \in A$.

Если же a не является элементом множества A, то записывается это так:

$a \notin A$

Знак $\in$ называется знаком принадлежности.

Множества бывают **конечные и бесконечные.** Конечное множество – это такое множество, число элементов которого конечно (т.е. существует натуральное число, являющееся числом элементов данного множества). В противном случае множество является бесконечным. Для наиболее важных числовых множеств приняты постоянные обозначения. Множество натуральных чисел обозначают буквой N, множество целых чисел - буквой Z, множество рациональных чисел - буквой R.

Множество A называют **подмножеством** множества B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае пишут $A \subseteq B$ ($\subseteq$ - называется **знаком включения**), читается эта запись так: «A содержится в B».

Легко видеть, что для любого множества $A \subseteq A$.

Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов, записывается это так:

A=B.

Два множества A и B называются **эквивалентными**, если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, множество всех натуральных чисел эквивалентно множеству всех четных чисел.

Существует множество, не имеющее элементов. Это множество называется **пустым множеством** и обозначается символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. У любого множества A есть, по крайней мере, два подмножества: само A и пустое множество $\varnothing$. Подмножества A и $\varnothing$ множества A называются **несобственными подмножествами** множества A. Все остальные подмножества множества A называются его **собственными подмножествами**.

Множества можно задать двумя основными способами: перечислив все

его элементы либо описав его элементы при помощи характеристического свойства, устанавливающего, какие элементы принадлежат, а какие не принадлежат данному множеству.

Множество B элементов x, обладающих свойством P(x), символически записываются в виде $B = \{x|P(x)\}$.

Например, 1) A={3,4,5,6} означает, что множество A состоит из четырех перечисленных элементов;

2) $B = \{x|x = 2k, k=1,2,3,...\}$ означает, что множество B состоит из четных положительных целых чисел 2,4,....

§2. Операции над множествами

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество C всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A,B.

Обозначается это так: $C = A \cup B = \{x|x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Пример 1: Если A={1,2,3}, а B={2,4,5}, то $A \cup B$ ={1,2,3,4,5}.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A,B. Обозначение: $A \cap B$.

Например, если A и B - множества из примера 1, то $A \cap B$={2} - одноэлементное множество.

Пересечение можно записать так:

$C = A \cap B = \{x|x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Замечание. Понятия объединения и пересечения множеств могут быть обобщены на случай любого числа множеств, (конечного или бесконечного).

Если даны множества $A_1, A_2, ..., A_k, ...$, то символическая запись $\bigcup_{k=1}^{\infty} Ak$ означает объединение данных множеств, т.е. определяет множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из данных множеств. Символическая запись $\bigcap_{k=1}^{\infty} Ak$ означает пересечение данных множеств, т.е. определяет множество, каждый элемент которого принадлежит всем данным множествам.

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Разность множеств A и B обозначается через A\B, итак

$A\backslash B := \{x|x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Для множеств A и B из примера 1 A\B={1,3}.

Если $B \subset A$, то разность A\B называется также **дополнением** множества B (до множества A) и обозначается так $\overline{A}$.

Декартовым (или **прямым**) .**произведением**, множеств A и B называют множество всех упорядоченных пар элементов (a,b), где $a \in A$ и $b \in B$. Элементы a b называются **компонентами** (координатами) пары (a,b). Прямое произведение множеств A и B обозначается через AxB.

Пример. 1) Пусть A={a,b}, B={a,c,d}. Тогда AxB={(a,a),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d)}.

2) Пару чисел (a,b) условились изображать на координатной плоскости точкой, **абсцисса** которой равна **первой** компоненте пары, а ордината - второй. Поэтому, если A=[2,3], а B=[1,4], то AxB на координатной плоскости изображается заштрихованным прямоугольником на рис.1.

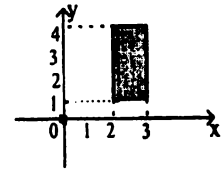


Рис. 1.

Прямое произведение $A_1xA_2x...xA_n$ множеств $A_1,A_2,...,A_n$ представляет собой множество всех упорядоченных n-ок элементов $(a_1,a_2,...,a_n)$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$,..., $a_n\in A_n$. В частности, прямое произведение RxRx...xR, где R - множество действительных чисел, определяет n-мерное арифметическое пространство R^n.

§3. Понятие функции

Пусть X и Y - некоторые заданные множества. Говорят, что на множестве X определена функция f; если каждому элементу $x\in X$ соответствует единственный элемент $y\in Y$. При этом X называется областью определения данной функции, а Y - совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, областью ее значений. Можно сказать, что функция f **отображает** непустое Множество X в Y, обозначают это так: $X \xrightarrow{f} Y$; $f: X \to Y$ или y=f(x). В этом случае значение f(a) называют **образом** элемента a при отображении f или частным значением функции при x=a. Вообще говоря, множества X и Y могут быть множествами любой природы. Мы будем рассматривать лишь числовые множества X и Y, а функцию y=f(x) будем называть числовой функцией. Буква x в этом равенстве называется **независимой переменной** или **аргументом**, а буква y - **зависимой переменной**. Разумеется, зависимую и независимую переменные можно обозначать любой другой буквой, например, z=g(u) и т.д.

Примеры: 1. Функция y=3 задает константу.

2. Функция $y=x^2$ отображает множество всех действительных чисел на множество неотрицательных чисел.

Пусть областью определения функции f является множество натуральных чисел N, т.е. $a_n=a(n)$. Такая функция называется **функцией целочисленного (натурального) аргумента** или **числовой последовательностью**:

$a_1,a_2,...,a_n,...,$

a_n называют общим членом числовой последовательности.

Например: $1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{9};...;\frac{1}{n^2};...$

Замечание. Если областью определения X функции f является множество пространства R^2:

$X=\{(x_1,x_2): x_1\in D_1 \subset R^1;\ x_2\in D_2 \subset R^1\}$,

тогда говорят, что на X задана функция двух переменных $z=f(x_1,x_2)$. В общем случае, если $X\subset R^n$, то на множестве X можно задать функцию f n переменных

$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

§4. Способы задания функции

Функцию можно задать следующими способами:

1. **Табличный способ задания функции.** При этом способе задания составляется таблица, в которой в определенном порядке выписывают ряд значений аргумента и соответствующие им значения функции. Такой способ чаще всего используется при оформлении результатов эксперимента. Широко известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т.д.

2. **Графический способ задания функции**. Графиком функции $y=f(x)$ $(X \longrightarrow Y)$ называется множество точек плоскости XOY (XxY) с координатами $(x,y=f(x))$, где $x \in X$, а $y \in Y$, здесь X – числовое множество на оси OX (отрезок, луч, прямая), Y - числовое множество на оси OY.

3. **Аналитический способ задания функции**. При этом способе задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т.е. с помощью формулы, указывающей, какие действия и в каком порядке надо произвести над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции.

Пример 1.

t	10	20	30	40	50	60	70	80
P	$1{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}9\cdot10^{-6}$	$2{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}1\cdot10^{-6}$	$2{,}2\cdot10^{-6}$	$2{,}2\cdot10^{-6}$

Здесь приведена таблица зависимости удельного сопротивления меди (в сантиметрах) при различных температурах t (в градусах). Результаты получены экспериментально.

Пример 2.

Функцию $y=|x|$ можно задать при помощи двух аналитических выражений:

$$\begin{cases} x, \text{ для } 0 \le x \le 1 \\ -x, \text{ для } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

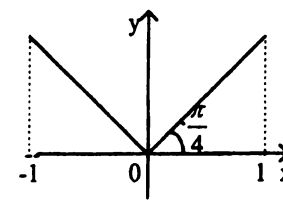


Рис. 2.

График этой функции имеет вид, показанный на рис. 2.

Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§1. Скалярные и векторные величины

Величины, встречающиеся в механике, физике и других прикладных науках, могут быть разделены на две категории. С одной стороны, величины, которые определяются только числовым значением (числом), например, масса, температура тела, объем; с другой - величины, для определения которых необходимо знать не только числовое значение, но и направление, например, сила, скорость, ускорение. Величины первого типа называются **скалярными**; величины второго типа - **векторными**.

Скалярная величина может быть задана числом в выбранной системе единиц. Векторную величину можно задать в виде направленного отрезка, предварительно выбрав линейный масштаб. Вектор, началом которого служит точка А, а концом - точка В, обозначается $\vec{AB}$ (рис.3). Вектор обозначается также одной буквой,

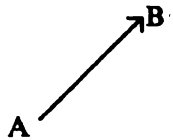


Рис. 3.

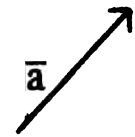


Рис. 4.

как показано на рис.4. Эту букву печатают жирным шрифтом, а в письме ставят над буквой черту $\bar{a}$. Длина вектора называется модулем и обозначается двумя вертикальными чертами справа и слева: $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$.

Вектор $\bar{O}$, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором. Его модуль равен нулю. Нулевой вектор не имеет определенного направления.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются **коллинеарными**.

Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ на рис.5 коллинеарные.

Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (равнонаправленные векторы) или противоположное. Так, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис.5) равнонаправлены, векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ (также $\bar{b}$ и $\bar{c}$) противоположно направлены.

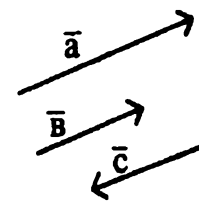


Рис. 5.

Нуль-вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два (ненулевых) вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **равны**, если они равно направлены и имеют один и тот же модуль.

Так, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на рис.6 равны, а векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ не равны.

Это записывается так: $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{a} \neq \bar{c}$.

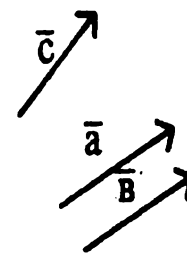


Рис. 6.

Два вектора, имеющие равные модули и противоположно направленные, называются **противоположными**. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

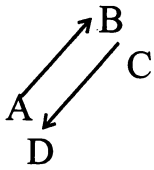
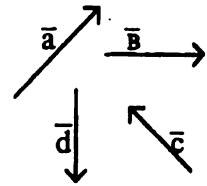


Рис. 7.



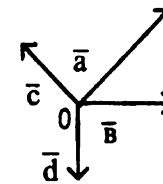


Рис. 8.

Так, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на рис.7 - противоположные. Из определения следует, что $-(-\bar{a})=\bar{a}$, $|-\bar{a}|=|\bar{a}|$.

Всякие векторы (в любом числе) можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало в точке О. Такое приведение изображено на рис. 8.

Итак, в дальнейшем будем иметь дело со свободными векторами, т.е. векторами, определенными с точностью до параллельного переноса.

§2. Линейные операции над векторами

Сложение векторов. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец - с концом вектора $\bar{b}$, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ приложено к концу вектора $\bar{a}$ (правило треугольника) (рис.9).

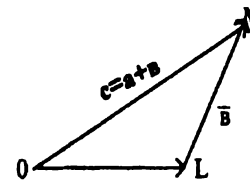


Рис. 9.

При сложении векторов имеют место неравенства:

$$|\bar{a}+\bar{b}| \le |\bar{a}|+|\bar{b}|$$

$|\bar{a}+\bar{b}| \ge |\bar{a}|-|\bar{b}|$, выражающие, что сторона ОМ треугольника ОМL (рис.7) меньше суммы и больше разности двух других сторон, причем равенство имеет смысл лишь для равнонаправленных векторов в первом неравенстве и для противоположно направленных векторов - во втором неравенстве.

Из определения следует, что сумма двух противоположных векторов равна нуль-вектору $\bar{a}+(-\bar{a})=\overline{O}$.

Сложение векторов подчиняется следующим законам:

а) переместительному закону

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$$

б) сочетательному закону

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

Операция сложения может быть распространена на любое число слагаемых векторов.

Для того, чтобы сложить n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., a_n$, надо к концу первого вектора приложить начало второго, затем к концу второго вектора приложить начало третьего и т.д. и, наконец, приложить к концу предпоследнего вектора начало последнего; тогда замыкающий вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, и будет являться вектором - суммой данных векторов.

При сложении векторов можно любым образом переставлять и группировать слагаемые.

Вычитание векторов. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют вектор $\bar{c}$, для которого $\bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$. Для геометрического построения вектора - разности $\bar{c}$ можно поступить так: из произвольного начала О строим векторы $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$.

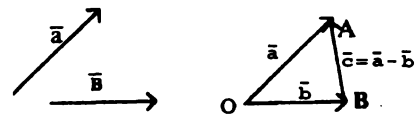


Рис. 10.

Вектор $\vec{BA}$ (проведенный из конца вычитаемого вектора $\vec{OB}$ к концу уменьшаемого вектора $\vec{OA}$) есть разность $\bar{a} - \bar{b}$.

Действительно, сумма $\overline{OB} + \overline{BA}$ равна $\overline{OA}$ (рис.10).

Умножение вектора на скаляр. Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр λ называется вектор, параллельный $\bar{a}$ и равнонаправленный с $\bar{a}$, если λ>0, и противоположно направленный, если λ<0. Обозначается произведение вектора $\bar{a}$ на скаляр λ так: $\lambda\bar{a}$ или $\bar{a}\,\lambda$. Таким образом, векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ - коллинеарные. Если λ=0, то, по определению, $\lambda\bar{a} = \bar{O}$.

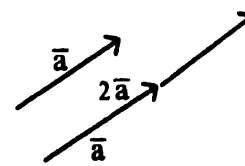


Рис. 11.

На рис.11 показан вектор $2\bar{a}$.

Если длина вектора $\bar{a}$ равна единице, то и любой вектор $\bar{c}$, равнонаправленный вектору $\bar{a}$, можно представить в виде $\lambda\bar{a}$, здесь λ - длина этого вектора.

Деление вектора $\bar{a}$ на скаляр $\lambda \neq 0$ эквивалентно умножению вектора $\bar{a}$

на число $\frac{1}{\lambda}$. Умножение вектора на скаляр подчиняется сочетательному

$$\lambda(\mu\ \bar{a}) = (\lambda\ \mu)\bar{a}$$

и распределительному $(\lambda + \mu)\ \bar{a} = \lambda\ \bar{a} + \mu\ \bar{a}$ законам.

§3. Проекция вектора на ось

Проекцией точки M на ось L будем называть основание A перпендикуляра MA на ось L. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось L называется длина отрезка AB, где точка A - проекция начала вектора, а точка B - проекция конца вектора $\bar{a}$ на ось L.

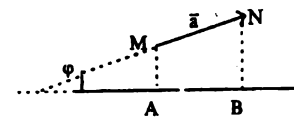


Рис. 12.

Обозначение: Пр$_L$ $\bar{a}$

Основные теоремы о проекциях векторов формулируются следующим образом.

а. Проекция вектора на какую-либо ось равна произведению модуля вектора на косинус угла наклона вектора к оси: Пр$_L$ $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

б. Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту же ось.

в. При умножении вектора на скаляр его проекция умножается на тот же скаляр.

§4. Прямоугольная система координат в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси OX, OY, OZ (рис.11), проходящие через некоторую точку O, образуют **прямоугольную систему координат в пространстве**.

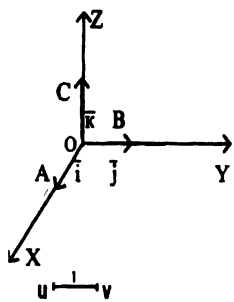


Рис. 13.

Точка O называется началом координат, прямые OX, OY, OZ - осями координат (OX - ось абсцисс, OY – ось ординат, OZ ось аппликат), а плоскости XOY, YOZ, ZOX - координатными плоскостями. Какой-либо отрезок UV принимается за единицу масштаба для всех трех осей. Отложив на осях OX, OY, OZ в положительном направлении отрезки $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, равные единице масштаба, получим три вектора. Они называются **основными векторами**, или **ортами**, и обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Координаты точки. Положение любой точки M в пространстве можно определить тремя числами (координатами) следующим образом: из точки M опустим перпендикуляр MD на плоскость XOY, затем из точки D опустим перпендикуляр DN на ось. OX, DL - на ось OY. Из точки M опустим также

перпендикуляр KM на ось OZ. Числа x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), измеряющие соответственно отрезки ON, OL и OK в выбранном масштабе, называются **прямоугольными координатами точки M**.

Они берутся положительными или отрицательными в зависимости от того, имеют ли векторы ON, OL и OK одинаковое либо противоположное направление с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Если точка M имеет координаты x, y, z, это записывается так: M(x,y,z). Вектор $\vec{OM}$, идущий от начала O к некоторой точке M, называется радиус-вектором точки M и обозначается r.

Возьмем теперь произвольный вектор $\bar{a}$, его начало поместим в начало координат O, а конец обозначим буквой M (рис. 14).

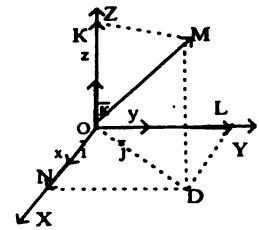


Рис. 14.

Спроектируем теперь вектор $\bar{a} = \vec{OM}$ на координатные оси. Величины проекции вектора на координатные оси называются координатами вектора $\bar{a}$. Будем обозначать их X, Y и Z: $Пр_{ox}\bar{a} = X$, $Пр_{oy}\bar{a} = Y$, $Пр_{oz}\bar{a} = Z$. Тот факт, что координаты вектора $\bar{a}$ равны X, Y и Z, записывается следующим образом: $\bar{a}\{X, Y, Z\}$.

Координаты x, y, z точки M (.конца вектора $\bar{a}$) соответственно равны координатам X, Y, Z вектора $\bar{a}$, т.е. x=X, y=Y, z=Z.

Если два вектора равны, то их координаты соответственно равны, т.е. если $\bar{a} = \bar{b}$ и $\bar{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, то $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$.

§5. Разложение вектора по ортам в пространстве

Каждый вектор равен сумме его геометрических проекций по трем осям координат. Так, вектор $\vec{OM}$ (рис. 14) равен сумме своих проекций на оси координат

$$\vec{OM} = \overline{ON} + \overline{OL} + \overline{OK} \qquad (*),$$

где $\overline{ON} = Пр_{ox}\vec{OM}$, $\overline{OL} = Пр_{oy}\vec{OM}$, $\overline{OK} = Пр_{oz}\vec{OM}$.

Так как вектор $\overline{ON}$ коллинеарен орту $\bar{i}$ и длина его равна X, то верно равенство $\overline{ON} = X\bar{i}$

Аналогично, векторы $\overline{OL}$ и $\overline{OK}$ можно представить в виде $\overline{OL} = Y\bar{j}$, $\overline{OK} = Z\bar{k}$. Следовательно, равенство (*) можно записать так:

$$\bar{a} = \vec{OM} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \cdot$$

Слагаемые $X\bar{i}, Y\bar{j}, Z\bar{k}$ называются компонентами (или составляющими) вектора $\bar{a}$. Тройка векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, по которым осуществлено разложение вектора, называется координатным базисом.

Представление вектора в виде суммы компонент называется **разложением этого вектора по базису** $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

§6. Операции над векторами, заданными в координатной форме

Прежде всего заметим, что проекция суммы векторов на любую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось. Как следствие из этого предложения и определения координат вектора вытекают следующие правила:

1. Два вектора равны, если равны их координаты.

2. При сложении векторов, заданных в координатной форме, их координаты складываются:

если $\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}$, $\bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}$,

то $\bar{a} + \bar{b} = (X_1 + X_2)\bar{i} + (Y_1 + Y_2)\bar{j} + (Z_1 + Z_2)\bar{k}$.

3. При вычитании векторов, заданных в координатной форме, их координаты вычитаются:

$$\bar{a} - \bar{b} = (X_1 - X_2)\bar{i} + (Y_1 - Y_2)\bar{j} + (Z_1 - Z_2)\bar{k}.$$

4. При умножении вектора на скаляр надо все его координаты умножить на этот скаляр:

если $\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, то $\lambda\,\bar{a} = \lambda\,X\bar{i} + \lambda\,Y\bar{j} + \lambda\,Z\bar{k}$.

Теперь легко получить условия коллинеарности двух векторов. Пусть даны два ненулевых коллинеарных между собой вектора $\bar{a} = X_1\bar{i} + Y_1\bar{j} + Z_1\bar{k}$ и $\bar{b} = X_2\bar{i} + Y_2\bar{j} + Z_2\bar{k}$. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, то всегда можно найти такой постоянный множитель $\lambda \neq 0$, что $\lambda\,\bar{b} = \bar{a}$.

В координатной форме имеем: $\lambda\,\bar{b} = \lambda\,X_2\bar{i} + \lambda\,Y_2\bar{j} + \lambda\,Z_2\bar{k}$.

Векторы $\bar{a}$ и $\lambda\,\bar{b}$ равны, а значит равны их координаты, следовательно, $X_1 = \lambda\,X_2$, $Y_1 = \lambda\,Y_2$, $Z_1 = \lambda\,Z_2$.

Определяя λ из каждого из этих трех равенств, можно составить пропорции

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}.$$

Полученное равенство является условием коллинеарности двух векторов.

Угол между осью координат и вектором.

Углы α, β, γ (рис. 15), образуемые положительными направлениями OX, OY, OZ с вектором $\bar{a}\{X,Y,Z\}$, можно найти по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{X}{|\bar{a}|}\right) \quad (1)$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Y}{|\bar{a}|}\right) \quad (2)$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\left(=\frac{Z}{|\bar{a}|}\right) \quad (3)$$

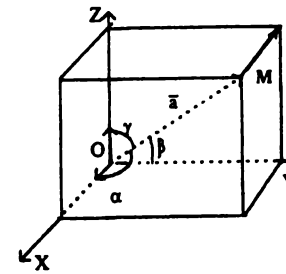


Рис. 15.

Если вектор $\bar{a}$ единичный, т.е. $|\bar{a}|$, то cos α =X, cos β =Y, cos γ =Z. Из формул (1), (2), (3) следует, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Величины cos α, cosβ, cos γ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Пример. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}\{2,-2,-1\}$.

Решение. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$

Деление отрезка в данном отношении.

Радиус-вектор $\bar{r}$ точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\frac{A_1A}{AA_1}=\frac{m_1}{m_2}$,

определяется формулой

$$\bar{r}=\frac{m_2\bar{r}_1+m_1\bar{r}_2}{m_1+m_2} \quad (4),$$

здесь $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ - радиус-векторы точек A_1 и A_2.

Координаты точки A находятся по формулам:

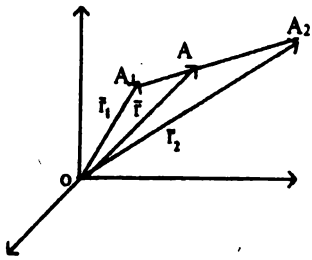


Рис. 16.

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2},$$

$$z=\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_1+m_2} \qquad (5)$$

В частности, координаты середины отрезка A_1A_2 равны

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (6)$$

Пример. Найти координаты точки А, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{2}{3}$, если $A_1(2,4,-1)$, $A_2(-3,-1,6)$.

По формулам находим:

$$x=\frac{3\times2+2\times(-3)}{2+3}=0,\quad y=\frac{4\times3+2\times(-1)}{5}=2,\quad z=\frac{3\times(-1)+2\times6}{5}=\frac{9}{5}.$$

§7. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

Для обозначения скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ употребляется одна из записей: $(\bar{a},\bar{b})$, $\bar{a}\bar{b}$.

Согласно определению имеем $(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\times|\bar{b}|\times\cos\varphi$. (7)

Очевидно, что скалярное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет равно нулю, если векторы перпендикулярны (ортогональны).

Заметим, что $|\bar{b}|\cos\varphi=Пр_{\bar{a}}\bar{b}$.

Теперь скалярное произведение можно записать в виде:

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\times Пр_{\bar{a}}\bar{b} \qquad (8)$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если , а угол

между ними равен 120°.

По формуле (7) имеем $(\vec{a},\vec{b})=2\times1\times\cos120°=-1$.

Скалярное произведение обладает следующими **свойствами**:

1. $(\bar{a},\bar{b})=(\bar{b},\bar{a})$ (переместительный закон).

2. $(\bar{a}+\bar{c}),\bar{b})=(\bar{a},\bar{b})+(\bar{c},\bar{b})$ (распределительный закон).

3. $(\bar{a},\bar{a})$ называется скалярным квадратом вектора $\bar{a}$, обозначается $\bar{a}^2$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля

$$(\bar{a},\bar{a})=|\bar{a}|\times|\bar{a}|\times\cos0°=|\bar{a}|^2$$

4. $(\bar{a},\lambda\cdot\bar{b})=(\lambda\cdot\bar{a},\bar{b})=\lambda\cdot(\bar{a},\bar{b})$, числовой множитель можно вывести за знак скалярного произведения.

§8. Скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме

Из определения скалярного произведения следует, что $(\bar{i},\bar{i})=\bar{i}^2=|\bar{i}|^2=1$;

$$(\bar{j},\bar{j})=1;\ (\bar{k},\bar{k})=1;\ (\bar{i},\bar{j})=0;\ (\bar{i},\bar{k})=0;\ (\bar{j},\bar{k})=0. \qquad (9)$$

Пусть теперь $\bar{a}=X_1\bar{i}+Y_1\bar{j}+Z_1\bar{k}$; $\bar{b}=X_2\bar{i}+Y_2\bar{j}+Z_2\bar{k}$.

Используя свойства скалярного произведения и равенства (9), получаем

$$(\bar{a},\bar{b})=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \qquad (10)$$

Мы получили формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных в координатной форме.

В частности, $\bar{a}^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$.

Теперь можно записать формулу для вычисления длины вектора

$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}. \qquad (11)$$

Замечание. Скалярное произведение может иметь следующий смысл. Пусть вектор $\bar{x}=\{X_1,X_2,X_3\}$ - план выпуска продукции (x_i - количество i-го продукта, выпускаемого фирмой), а $\bar{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$ - вектор стоимости единицы этих продуктов, тогда доход фирмы можно записать в виде скалярного произведения этих векторов

$$(\bar{c},\bar{x})=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3.$$

Пример. Найти длины векторов $\bar{a}\{3,2,1\}$, $\bar{b}\{2,-3,0\}$ и их скалярное

произведение.

Решение. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$;

$|\bar{b}| = \sqrt{\bar{b}^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$;

$(\bar{a}, \bar{b}) = 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 1 \times 0 = 0$;

Значит, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны.

§9. Угол между векторами

Найдем угол между ненулевыми векторами $\bar{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$.

Возьмем скалярное произведение и определим косинус угла φ между этими векторами:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \times |\bar{b}| \times \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \times |\bar{b}|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \times \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \qquad (12)$$

Если же векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то cos φ и, следовательно,

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

Это равенство является условием ортогональности (перпендикулярности) двух векторов.

Пример 1. Найти угол между векторами $\bar{a}\{1,1,1\}$ и $\bar{b}\{2,0,3\}$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{1 \times 2 + 1 \times 0 + 1 \times 3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{13}} \approx 0{,}8006$$

Откуда φ=36°50'.

Пример 2. Вершины треугольника ABC имеют координаты A(1,2,-3); B(0,1,2); C(2,1,1). Найти длины сторон AB и AC и угол A.

Решение.

$$\vec{AB} = \{(0-1), (1-2), (2+3)\} = \{-1,-1,5\}$$

$$\vec{AC} = \{(2-1), (1-2), (1+3)\} = \{1,-1,4\}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos A = \frac{(\overline{AB} \times \overline{AC})}{|AB||AC|} = \frac{(-1)\times 1 + (-1)\times(-1) + 5\times 4}{3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}$$

Пример 3. Найти проекцию вектора $\bar{b}\{5,-3,7\}$ на вектор $\bar{a}\{2,-2,1\}$.

Решение. $Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|} = \frac{2\times 5 + (-2)\times(-7) + 1\times 3}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{27}{3} = 9$.

§10. Понятие арифметического n - мерного пространства

В предыдущих параграфах мы рассмотрели векторы в декартовой прямоугольной системе координат с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, .. \bar{e}_n$. Мы знаем теперь, что любой вектор $\bar{a}$ в этой системе можно разложить по базису, т.е. представить в виде

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$

где числа X,Y,Z являются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и однозначно его определяют. Итак, можно назвать вектором $\bar{a}$ упорядоченную тройку чисел (X,Y,Z).

Например, вектор $\bar{i}$ представляет тройка чисел (1,0,0), соответственно $\bar{j}$ - {0,1,0}, $\bar{k}$ -{0,0,1}.

Будем говорить, что эти векторы заданы в трехмерном пространстве R^3, (3 - размерность пространства). Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют базис пространства R^3, а вектор $\bar{a}\{X,Y,Z\}$ является элементом этого пространства.

Можно теперь обобщить введенные понятия. Назовем вектором n-мерного пространства R^n упорядоченную n-ку чисел $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1)$. Особые векторы $\bar{e}_1\{1,0,0,...,0\}$, $\bar{e}_2\{0,1,0,...,0\}$,..., $\bar{e}_n\{0,0,0,...,1\}$ образуют базис пространства R^n.

Замечание. Очевидно, что пространство R^n совпадает с введенным ранее декартовым (прямым) произведением множеств. Подобно тому, как это было

сделано выше, можно определить операции над векторами в пространстве R^n.

Пусть $\bar{a}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $\bar{b}\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ - два вектора пространства R^n.

1. Суммой векторов $\bar{a}, \bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\bar{c}\{c_1, c_2, ..., c_n\}$, где $c_i = a_i + b_i$, $(i = \overline{1, n})$.

2. Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор, координаты которого равны произведению соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на число λ:

$$\lambda \bar{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n\}.$$

Вектор $\bar{O} = \{0, 0, ..., 0\}$ называется нулевым вектором.

Вектор $\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + ... + \lambda_n \bar{x}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ... \bar{x}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$. Векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ... \bar{x}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$, не равные нулю, что $\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + ... + \lambda_n \bar{x}_n = 0$.

Если же это равенство выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ... \bar{x}_n$, называются **линейно независимыми**. Очевидно, что векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы и любой вектор $\bar{a}\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, ..., a_n \bar{e}_n.$$

Это равенство представляет собой разложение вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, числа $a_1, a_2, ..., a_n$ называются координатами вектора $\bar{a}$ в данном базисе.

3. Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т.е. $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$.

Очевидно, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля. Отсюда легко получить формулу для вычисления длины (модуля) вектора в пространстве R^n

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ .$$

Т. к. по определению $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| \times |\bar{b}| \times \cos\varphi$, то для вычисления косинуса угла между двумя векторами получаем следующую формулу

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ...a_n^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ...b_n^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\ .$$

Известно, что если два вектора ортогональны (перпендикулярны), то косинус угла между ними равен нулю, отсюда имеем условие ортогональности двух векторов

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = 0\ .$$

Глава III. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. Системы координат

Алгебра и геометрия воспринимаются большинством школьников как совершенно разные науки, на самом деле они очень близки. С помощью метода координат можно было бы изложить весь школьный курс геометрии без единого чертежа, используя только числа и алгебраические операции. Геометрические фигуры при этом описывались бы системами уравнений и неравенств, а все теоремы геометрии превратились бы в алгебраические соотношения.

Установление связи между алгеброй и геометрией было, по существу, революцией в математике. Это позволило воспринимать математику как единую науку и способствовало ее быстрому развитию. Создателем метода координат считают Рене Декарта, который в последней части философского трактата, вышедшего в 1637 году, дал описание метода координат и его применения к решению геометрических задач. Развитие идей Декарта привело к развитию целой ветви математики, которая решает геометрические задачи аналитическими, т.е. алгебраическими методами и методами анализа. Эту часть математики теперь называют аналитической геометрией.

В школьном курсе математики уже было дано определение метода координат. Положение точки М на плоскости, относительно введенной системы координат, определяется заданием двух чисел: абсциссой х и ординатой у. Пара чисел (х,у) называется **декартовыми прямоугольными координатами** точки на плоскости.

Декартова прямоугольная система координат не является единственной системой координат, позволяющей определять положение точек плоскости, но

является наиболее простой и часто используемой координатной системой.

Полярная система координат.

Пусть на плоскости даны некоторая точка О (назовем ее **полюсом**) и проходящая через нее ось ОР (назовем ее **полярной** осью) (рис. 17). Положение любой точки М плоскости определяется расстоянием этой точки от полюса - **радиус-вектором** r и полярным углом φ между полярной осью и радиус-вектором r.

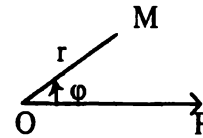


Рис. 17.

Две координаты (r, φ) определяют единственную точку плоскости и называются ее полярными координатами (условимся придавать радиус-вектору значения $r \geq 0$ а $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Замечание. Полюс О является точкой, радиус-вектор которой равен нулю, а полярный угол φ не определен.

Таким образом, системы координат позволяют установить **взаимно-однозначное** соответствие между точками плоскости и парами чисел. Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки. Пусть даны декартова система координат и полярная с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс (рис.18).

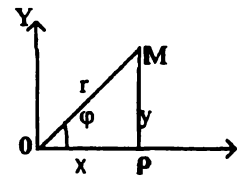


Рис. 18.

Обозначим через x и y декартовы координаты точки М, через r и φ ее полярные координаты. Из треугольника ОМР видно, что зависимость между полярными координатами (r, φ) точки М и ее прямоугольными координатами (x,y) выражается формулами:

$$x = r \times \cos\varphi ; \qquad (1)$$

$$y = r \times \sin\varphi$$

и обратно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (2)$$

Пример. Даны декартовы координаты точки М(1,-1). Найти ее полярные координаты.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{1} - 1$$

Т.к. x=1>0 и y = -1<0, то точка М находится в IV четверти, а значит $\varphi = \frac{7}{4}\pi$.

Итак, полярные координаты точки; r = $\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7}{4}\pi$

§2. Линии и их уравнения

В предыдущем параграфе было показано, что в декартовой системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждый паре чисел соответствует определенная точка плоскости.

Можно установить, что линиям на плоскости соответствуют уравнения с двумя переменными. Связь между уравнениями и линиями позволит свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений.

В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек, удовлетворяющих определенному свойству.

Линии на плоскости соответствует некоторое уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней. Такое уравнение называется уравнением данной линии. Входящие в это уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются **текущими координатами**.

Пример. Составить уравнение окружности радиуса R. Выберем произвольно оси координат. Тогда центр C данной окружности будет иметь координаты a и b. Окружность с центром в точке C(a,b) и радиусом R можно рассматривать как геометрическое место точек плоскости, удаленных от точки C на расстояние R, т.е. для любой точки M, лежащей на окружности, MC=R. Обозначим координаты точки M через x и y и, определяя MC как расстояние точки M от центра C окружности, получим следующее равенство:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R.$$

Возведя обе части равенства в квадрат, получим искомое уравнение окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (3)$$

В этом уравнении постоянные a, b - координаты центра окружности, R - радиус окружности; переменные x и y являются текущими координатами произвольной точки окружности. В частности, если центр окружности находится в начале координат, т.е. a=b=0, то уравнение окружности имеет более простой вид:

$$x^2+y^2 = R^2. \qquad (4)$$

Можно утверждать, что всякая линия, рассматриваемая как геометрическое место точек, определяется уравнением между координатами ее точек.

§3. Прямая линия

3.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Изучение геометрических свойств линий начнем с простейшей из линий - с прямой. Всякая прямая в декартовой системе координат может быть

представлена уравнением первой степени и, обратно, всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию.

Рассмотрим прямую, не параллельную осям координат. Положение ее на плоскости вполне определяется заданием **угла наклона прямой к оси OX** и величиной отрезка OB, отсекаемого прямой на оси OY. Под углом наклона прямой к оси OX будем понимать тот угол, на который надо повернуть ось OX против часовой стрелки, чтобы она совпала с данной прямой (или оказались параллельной ей), обозначим этот угол через φ. Величину отрезка OB обозначим через b. Пусть M(x,y) - произвольная точка, лежащая на прямой (рис.19).

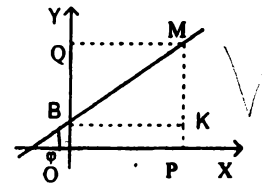


Рис. 19.

При движении точки по прямой ее координаты остаются все время связанными между собой некоторым условием. Выпишем это условие. Проведем прямые BK и MK, параллельные осям координат. Мы получили прямоугольный треугольник MBK, для которого верно соотношение

$$tg\varphi = \frac{MK}{BK} \qquad (5)$$

Тангенс угла наклона прямой к оси OX называется угловым коэффициентом прямой. Обозначим его буквой K, т.е. tg φ=K. Из рис.19 видно, что MK=y-b, BK=x, равенство (5) теперь можно записать в виде:

$$K = \frac{y-b}{x}$$

и окончательно

$$y=Kx+b. \qquad (6)$$

Этому уравнению удовлетворяет лишь координаты точек, лежащих на рассматриваемой прямой, оно нарушается, если точка не лежит на прямой. Таким образом, полученное уравнение (6) является уравнением заданной прямой линии.

Уравнение прямой вида (6) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

Уравнение (6) мы получили, считая, что прямая не параллельна осям координат.

Посмотрим, какое уравнение будет иметь прямая, параллельная какой-либо координатной оси.

1) Пусть прямая параллельна оси OY. Обозначим через a абсциссу точки пересечения этой прямой с осью OX. Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную a, если же точка не лежит на прямой, то ее абсцисса будет отлична от a. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид

$$x=a. \qquad (7)$$

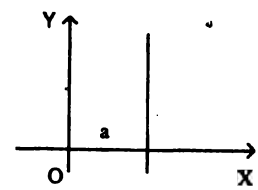


Рис. 20.

2) Пусть теперь прямая параллельна оси OX. Ее угловой коэффициент K=0. Считая этот случай частным, из уравнения (6) получаем

y=b (8)

Итак, если прямая не параллельна осям координат, то ее уравнение может быть записано в форме (б). Если же прямая параллельна оси OY, то ее уравнение можно записать в форме (7), уравнение прямой, параллельной оси OX, имеет вид (8). Все эти уравнения являются уравнениями первой степени относительно переменных x и y. Таким образом, мы показали, что в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнениями первой степени.

Пример. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси OY отрезок b=3 и составляющую с осью: 1) φ=45°; 2) φ=135°.

Решение. 1) K=tg φ=tg 45°=1. Уравнение прямой имеет вид: y=1xx+3 или y=x+3;

2) K = tg φ = tg135° =-1. Уравнение имеет вид: y=-x+3.

3.2. Общее уравнение прямой

Общее уравнение первой степени относительно x и y имеет вид:

Ax+By+C=O. (9)

Здесь A, B, C - произвольные числа, не равные нулю одновременно. Разрешим уравнение (9) относительно y (считая, что $B \neq 0$).

Получим: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, или, введя обозначения $-\frac{A}{B} = K$, $-\frac{C}{B} = b$, y=Kx-b.

Выше мы показали, что это уравнение является уравнением прямой линии с угловым коэффициентом K и отсекающей на оси OY отрезок, равный b.

Если теперь B=O, то уравнение (9) примет вид

Ax+C=O.

Разрешая это уравнение относительно x, получим $x = -\frac{C}{A}$, или, обозначая $-\frac{C}{A} = a$, $x = a$

Получили уравнение прямой, параллельной оси OY.

При A=0 уравнение (9) примет вид: By+C=0, или $y = -\frac{C}{B}$.

Обозначая $-\frac{C}{B} = b$, получим

y=b.

Получили уравнение прямой, параллельной оси OX.

Таким образом, мы показали, что всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет прямую линию. Уравнение (9) называется **общим уравнением прямой**.

Пример. Написать уравнение с угловым коэффициентом для прямой,

заданной общим уравнением 2x+3y+7=0.

Разрешим уравнение относительно y:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Видно, что угловой коэффициент $K = -\frac{2}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY, $b = -\frac{7}{3}$.

Таким образом мы убедились, что общее уравнение первой степени (9) определяет прямую линию. Рассмотрим некоторые его частные случаи.

1. При C=0 уравнение (9) имеет вид:

Ax+By=0,

которое определяет прямую, проходящую через начало координат, т.к. ему удовлетворяют координаты начала x=0, y=0.

2. Если в уравнении (9) A=0, получим By+C=0. или

y=b (где $b = -\frac{C}{B}$).

Получили уравнение прямой, параллельной оси OX, т.к. для всех точек прямой линии ордината y имеет постоянное значение.

3. При B=0 уравнение (9) примет вид:

Ax+C=0

или x=a (где $a = -\frac{C}{A}$)

и определяет прямую, параллельную оси OY.

4. При C=0, B=0 уравнение (9) имеет вид:

Ax=0

или x=0.

Прямая совпадает с осью OY.

5. При C=0, A=0 уравнение (9) примет вид:

By=0

или y=0.

Прямая совпадает с осью OX.

3.3. Угол между двумя прямыми

Пусть даны две прямые

$y=K_1x+b_1$ (I)

$y=K_2x+b_2$ (II)

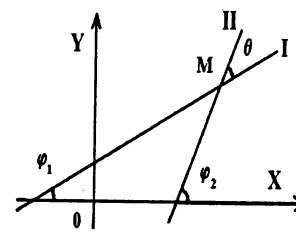


Рис. 21.

Углом между прямыми (I) и (II) будем называть тот угол, на который надо повернуть прямую (I) (против часовой стрелки), чтобы она совпадала с прямой (II), (или стала ей параллельна).

Очевидно, что угол между прямыми (I) и (II) определяется не однозначно (с точностью до слагаемого, кратного π). Значение угла всегда можно выбрать так, чтобы оно было неотрицательно и меньше π.

Обозначим теперь углы наклона прямых (I) и (II) к оси OX соответственно через φ_1 и φ_2, а угол между прямыми через θ. Тогда $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ (см. рис. 21) или $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$.

По известной формуле имеем:

$$tg\theta = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \times tg\varphi_2}.$$

Т.к. $tg\varphi_1 = K_1$ и $tg\varphi_2 = K_2$, получим:

$$tg\theta = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 \times K_2}. \qquad (10)$$

Получили формулу для вычисления угла между двумя прямыми.

Замечание. Если порядок, в котором рассматриваются прямые, не указан, тогда можно установить его произвольно. Очевидно, изменение порядка повлечет за собой изменение знака для тангенса угла.

Пример. Найти угол между прямыми

$y=2x+5$ и $3x+y+2=0$.

Пронумеруем прямые в порядке их записи, тогда их угловые коэффициенты будут равны $K_1 = 2$, $K_2 = -3$ соответственно. По формуле (10) получим:

$$tg\theta = \frac{-3-2}{1-2\times 3} = 1, \text{ отсюда } \theta = 45^\circ.$$

3.4. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые $y=K_1x+b_1$ и $y=K_2x+b_2$ параллельны, тогда угол $\theta = 0$, а значит и $tg\theta = 0$. Из формулы (10) следует, что $tg\,\varphi_1 = tg\,\varphi_2$

или $K_1 = K_2$. (11)

Итак, **для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны.**

Пусть прямые (I) и (II) перпендикулярны, тогда можно считать, что:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$tg\varphi_2 = tg(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}) = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1} \text{ или } tg\varphi_1 \times tg\varphi_2 = -1.$$

Получаем условие перпендикулярности двух прямых

$$K_1 \times K_2 = -1 \qquad (12)$$

Пример 1. Прямые 3x-4y+5=0 и 6x-8y-3=0 параллельны, т.к. их угловые коэффициенты $K_1 = \frac{3}{4}$ и $K_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ равны. Условие параллельности выполнено.

Пример 2. Определить, при каком значении K прямая y=Kx+3 будет перпендикулярна прямой y=4x-1. Угловой коэффициент второй прямой равен K_2=4. Из условия перпендикулярности получим $K \cdot 4 = -1$. Отсюда $K = -\frac{1}{4}$.

3.5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Найдем уравнение прямой с данным угловым коэффициентом K, проходящей через данную точку $M(x_1,y_1)$.

Уравнение этой прямой будем искать по формуле (6)

y=Kx+b.

Неизвестное значение b определим из условия прохождения искомой прямой через точку M, координаты которой должны удовлетворять уравнению (6). Подставляя в это уравнение вместо текущих координат значения x_1,y_1 получим:

$y_1=Kx_1+b$.

Отсюда можно определить b и подставить найденное значение в уравнение (6)

$b=y_1-Kx_1$;

$y=Kx+(y_1-Kx_1)$ (13)

или $y-y_1=K(x-x1)$.

Мы получили уравнение прямой линии, проходящей через точку $M(x_1,y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент K.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (1,2) параллельно прямой 2x-3y+5=0.

В силу параллельности прямых угловой коэффициент искомой прямой равен угловому коэффициенту $K = \frac{2}{3}$ данной прямой. Итак, подставляя в уравнение (13) $K = \frac{2}{3}$, x_1=1, y_1=2, получим уравнение искомой прямой $y-2 = \frac{2}{3}(x-1)$. После преобразования имеем:

2x-3y+4=0.

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (-1,1) перпендикулярно к прямой 3x-y+2=0.

Угловой коэффициент данной прямой K_1=3. Из условия перпендикулярности

прямых K_1 K2 =-1 получаем угловой коэффициент K_2 искомой прямой:

3 K_2=-1 или $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Итак, из (13) получим уравнение искомой прямой

$$K_2 = -\frac{1}{3}$$

или x+3y-2=0.

3.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$.

Найдем уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Так как эта прямая проходит через точку M, то согласно формуле (13) ее уравнение имеет вид:

$y-y_1 = K(x-x_1)$,

где K - неизвестный угловой коэффициент.

Значение этого коэффициента определим из того условия, что искомая прямая проходит через точку N, а значит ее координаты удовлетворяют уравнению (13):

$y_2 - y_1 = K(x_2 - x_1)$,

отсюда

$$K = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставим найденное значение K в уравнение (13) и получим

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

или $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (14)$$

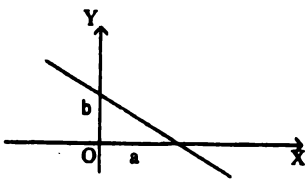


Рис. 22.

Формула (14) определяет уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1,y_1)$ и $N(x_2,y_2)$.

В частном случае, когда точки M(a,0), N(0,b) лежат на осях координат, то уравнение (14) примет более простой вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (15)$$

Уравнение (15) называется уравнением прямой в отрезках, здесь a и b обозначают отрезки, отсекаемые прямой на осях (рис. 22).

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M(1,2) и B(3,-1).

Решение. Согласно (14) уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x-1}{3-1}, \text{ откуда } \frac{y-2}{-3}=\frac{x-1}{2}$$

или $2(y-2)=-3(x-1)$

окончательно получаем искомое уравнение

$$3x+2y-7=0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M{2,1) и точку пересечения прямых x+y-1=0, x-y+2=0.

Решение. Координаты точки пересечения прямых найдем, решив совместно данные уравнения

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$$

Если сложить почленно эти уравнении, получим 2x+1=0, откуда $x=-\frac{1}{2}$.

Подставим найденное значение в любое уравнение, найдем значение ординаты y:

$$-\frac{1}{2}-y+2=0 \text{ или } y=\frac{3}{2}.$$

Теперь напишем уравнение прямой, проходящей через точки (2,1) и $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$:

$$\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2} \text{ или } \frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{x-2}{-\frac{5}{2}}.$$

Отсюда $\frac{y-1}{1}=\frac{x-2}{-5}$ или $-5(y-1)=x-2$.

Окончательно получаем уравнение искомой прямой x+5y-7=0.

Пример 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки M(2,1) и N(2,3).

Используя формулу (14), получим уравнение

$$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{2-2}.$$

Оно не имеет смысла, так как второй знаменатель равен нулю. Из условия задачи видно, что абсциссы обеих точек имеют одно и то же значение. Значит, искомая прямая параллельна оси OY и ее уравнение имеет вид: x=2.

Замечание. Если при записи уравнения прямой по формуле (14) один из знаменателей окажется равным нулю, то искомое уравнение можно получить, приравняв к нулю соответствующий числитель.

3.7. Расстояние от точки до прямой

Задачу вычисления расстояния от данной точки до данной прямой можно легко решить, используя уже полученные знания.

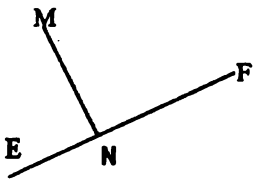


Рис. 23.

Пусть дана точка M(-1,1) и прямая 3x-4y+12=0. Необходимо найти расстояние от этой точки до прямой EF. Расстояние d от точки M до прямой EF равно длине перпендикуляра MN, опущенного из M на EF (Рис.23).

Запишем алгоритм решения задачи.

1) Найдем угловой коэффициент K_1 прямой EF, для этого разрешим уравнение прямой EF относительно y:

$$y=\frac{3}{4}x+3 \qquad (16)$$

$$K_1=\frac{3}{4}.$$

2) Используя условие перпендикулярности двух прямых, найдем угловой коэффициент K_2 перпендикуляра MN:

$$K_1\cdot K_2=-1$$

или $\frac{3}{4}\cdot K_2=-1$,

отсюда $K_2=-\frac{4}{3}$.

3) Теперь напишем уравнение прямой MN, проходящей через точку M(-1,1) с угловым коэффициентом $K_2=-\frac{4}{3}$

$$y-1=-\frac{4}{3}(x+1)$$ или

$$y=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}. \qquad (17)$$

4) Вычислим координаты точки N - точки пересечения прямой EF с перпендикуляром MN. Координаты этой точки удовлетворяют уравнениям (16) и (17), мы их получим, решив совместно эти уравнения. Приравняем правые части этих уравнений

$$\frac{3}{4}x+3=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

и вычислим отсюда абсциссу x точки N

$$\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}-3 \text{ или } \frac{25}{12}x=-\frac{10}{3}, \text{ откуда } x=-\frac{8}{5}.$$

Подставив найденное значение, например, в уравнение (16), вычислим ординату точки N:

$$y=\frac{3}{4}(-\frac{8}{5})+3 \text{ или } y=-\frac{6}{5}+3, \text{ откуда } y=\frac{9}{5}.$$

Итак, точка N имеет координаты $N(-\frac{8}{5};\frac{9}{5})$

5) Найдем теперь расстояние между точками M и N

$$|MN|=d=\sqrt{\left(-1+\frac{8}{5}\right)^2+\left(1-\frac{9}{5}\right)^2}=1.$$

Эту задачу можно легко решить, используя общую формулу вычисления расстояния d от точки $M(x_0,y_0)$ до прямой Ax+By+C=0, которая имеет вид:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (18)$$

Для нашей задачи мы получим:

$$d=\frac{|3\cdot(-1)-4\cdot1+12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=1.$$

§4. Кривые второго порядка

4.1. Предварительные замечания

Общее уравнение второго порядка относительно x и y содержит члены второй степени (x^2,xy,y^2), первой степени (x,y) и нулевой степени (свободный член), а значит имеет вид:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \quad (19)$$

Здесь хотя бы один коэффициент A, B, C должен быть отличен от нуля.

Уравнение (19) является **уравнением второй степени**, а линии, уравнения которых описываются уравнением типа (19), называются **кривыми второго порядка**

4.2. Окружность

Самой простой кривой второго порядка является окружность, которую можно **определить как геометрическое место точек, удаленных от точки C(a,b) на равное расстояние R**.

Точка C называется центром окружности, а R - радиусом данной окружности. Уравнение окружности с центром в точке C(a,b) и с радиусом R всегда можно привести к простому виду:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (20)$$

Пример. Привести к виду (20) (если это ворможно) уравнение второго порядка

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0.$$

Сгруппируем члены, содержащие x, и отдельно члены, содержащие y, и выделим в них полные квадраты, т.е. двучлен x^2-2x представим в виде:

$$x^2-2x=(x-1)^2-1,$$

а двучлен y^2+4y - в виде

$$y^2+4y=(y+2)^2-4.$$

После этого преобразования данное уравнение запишется так:

$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0$$

или $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$.

Мы получили уравнение окружности с центром в точке C(1,-2) и радиусом, равным 3.

Замечание 1. Уравнение (19) определяет окружность (его можно привести к виду (20)), если коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а член с произведением координат отсутствует.

Замечание 2. Если начало координат совпадает с центром окружности, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Такое уравнение называется **каноническим уравнением окружности**.

В частном случае, если R=0, мы имеем уравнение $x^2+y^2=0$, определяющее одну точку - начало координат.

4.3. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная

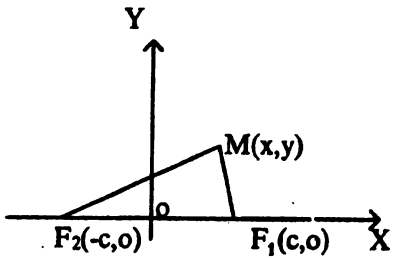


Рис. 24.

(больше расстояния между фокусами).

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 (рис. 24), а расстояние между ними через 2c

$F_1F_2=2c$.

Примем за ось абсцисс прямую, соединяющую фокусы, выбрав на ней положительное направление от F_2 к F_1; начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2 между фокусами. Тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно (c,0) и (-c,0).

Обозначим сумму расстояний точек эллипса от фокусов через 2a. По определению эллипса имеем

$MF_1+MF_2=2a$.

Каноническое уравнение эллипса в выбранной системе координат с данными обозначениями имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (21)$$

здесь $b_2=a^2-c^2(c<a)$.

Исследуя уравнение эллипса (21), можно сделать следующие заключения относительно формы эллипса.

1) Симметрия эллипса.

Так как уравнение (21) содержит только квадраты текущих координат, то если точка (x,y) находится на эллипсе, то и точки (±x,±y) находится на эллипсе при произвольном выборе знаков у координат. Это означает, что оси координат являются осями симметрии эллипса.

Ось симметрии эллипса, на которой находятся фокусы, называется **фокальной осью**. Центр симметрии (точка пересечения осей симметрии) называется **центром** эллипса. Для эллипса, заданного уравнением (21), фокальная ось совпадает с осью OX, а центр - с началом координат.

2) Точки пересечения с осями симметрии.

Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его вершинами. Вершины A_1, A_2, B_1, B_2 эллипса, заданного уравнением (21), находятся в точках пересечения эллипса с осями координат. Координаты вершин A можно найти, полагая в уравнении (21) y=0

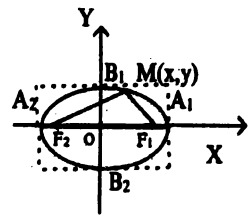


Рис. 25.

$\frac{x^2}{a^2}=1$, откуда $x^2=a^2$ и $x=\pm a$.

Полагая x=0, найдем ординаты вершин B_1 и B_2;

$\frac{y^2}{b^2}=1$, или $y^2=b^2$, откуда $y=\pm b$.

Итак, вершины эллипса имеют следующие координаты:
$A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ (рис. 25).

Отрезки $A_1A_2=2a$ и $B_1B_2=2b$, соединяющие противоположные вершины эллипса, называются соответственно **большой и малой осями** эллипса. Длины a и b называют соответственно **большой и малой полуосями эллипса**.

3) Форма эллипса.

Из уравнения (21) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\le 1$, или. $|x|\le a$.

Аналогично $|y|\le b$. Следовательно, эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами, равными 2a и 2b, с центром в начале координат (см. рис.25).

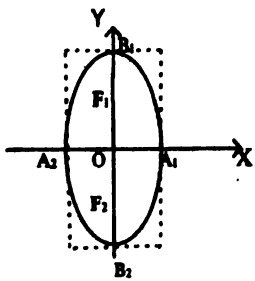


Рис. 26.

Замечание 1. Если a=b (c=0), уравнение (21) принимает вид $x^2+y^2=a^2$ и определяет окружность, а значит окружность можно рассматривать как частный случай эллипса с равными полуосями.

Замечание 2. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - называется **эксцентриситетом** эллипса.

Для эллипса $0\le\varepsilon<1$ (для окружности ε=0). Величина эксцентриситета влияет на форму эллипса. Так, при очень малом ε полуоси a и b почти равны и эллипс напоминает окружность. Если же величина ε близка к единице, то эллипс имеет сильно вытянутую форму.

Замечание 3. Если фокусы эллипса расположены на оси OY, то эллипс «вытягивается» вдоль оси OY, как это показано на рис.26, тогда фокусы имеют следующие координаты $F_1(0,c)$ и $F_2(0,-c)$.

Как известно, траекторией движения планет и некоторых комет является эллипс, в одном из фокусов которого находится солнце. Оказывается, эксцентриситеты планетных орбит малы, а кометных - велики (близки к 1).

Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы - по вытянутым эллипсам, то приближаясь к солнцу, то удаляясь от него.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось b=3.

Решение. По условию 2c=8, т.е. c=4, b=3.

Мы знаем, что $b^2=a^2-c^2$, отсюда $a^2=b^2+c^2$, т.е. $a^2=3^2+4^2=25$ или a=5.

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

4.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

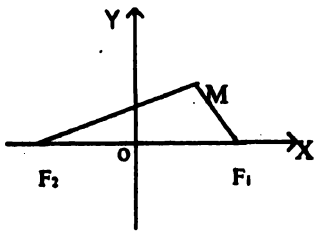


Рис. 27.

Обозначим эту постоянную через 2a, расстояние между фокусами через 2c, а оси координат выберем так же, как в 4.3.

Пусть M(x,y) - произвольная точка гиперболы (рис. 27).

По определению гиперболы $F_2M-F_1M=\pm 2a$. (Знак плюс в правой части надо выбрать, если $F_2M>F_1M$, и минус, если $F_2M<F_1M$.

Каноническое уравнение гиперболы в выбранной системе координат при данных обозначениях имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (22)$$

где $b^2 = c^2-a^2$ (c>a).

Исследуем формулу гиперболы.

1) Уравнение (22) содержит квадраты текущих координат, следовательно, оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось симметрии, на которой находятся фокусы, называется фокальной осью, точка пересечения осей симметрии - центром гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (22), фокальная ось совпадает с осью OX, а центр - с началом координат.

2) Точки пересечения с осями симметрии. Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются вершинами гиперболы. Полагая в уравнении (22) y=0, найдем абсциссы точек пересечения с осью OX:

$\frac{x^2}{a^2}=1$ или $x^2 = a^2$, откуда $x=\pm a$.

Итак, точки $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$ являются вершинами гиперболы.

Если же в уравнении (22) принять x=0; получим

$-\frac{y^2}{b^2}=1$ или $y^2=-b^2$,

т.е. для y мы получили мнимые значения: Это означает, что гипербола не пересекает ось OY. В соответствии с этим ось симметрии, пересекающая гиперболу; называется действительной осью (фокальная ось); ось симметрии, которая не пересекает гиперболу, - ее мнимой осью. Для гиперболы, заданной уравнением

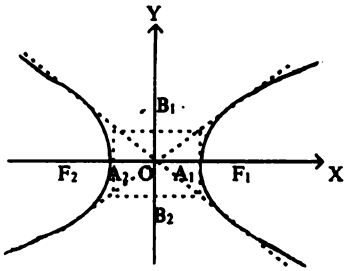


Рис. 28.

(22), действительной осью симметрии является ось OX, а мнимой осью – ось OY. Длина отрезка $A_1A_2=2a$, число a называется действительной полуосью гиперболы. Отложим на мнимой оси гиперболы по обе стороны от центра симметрии O отрезки OB_1 и OB_2 длиною b, тогда отрезок $B_1B_2=2b$ называют мнимой осью, а величина b - мнимой полуосью гиперболы.

3) Форма гиперболы.

Из уравнения (22) видно, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$,

следовательно, $|x| \geq 1$. Кривая имеет форму; изображенную на рис.28. Она располагается вне прямоугольника со сторонами, равными 2a и 2b, с центром в начале координат, и состоит из двух отдельных ветвей, простирающихся в бесконечность (см. рис.28). Диагонали этого прямоугольника определяются уравнениями

$$y=\frac{b}{a}x;\ y=-\frac{b}{a}x \qquad (23)$$

и являются асимптотами гиперболы.

Если a=b, гипербола называется равносторонней.

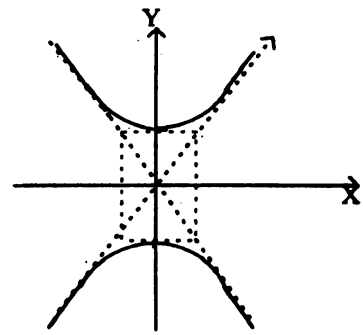


Рис. 29.

Замечание 1. Если мнимая ось гиперболы равна 2a и расположена на оси OX, а действительная ось равна 2b и расположена на оси OY, то уравнение такой гиперболы (рис. 29) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (24)$$

Гиперболы (22) и (24) называются **сопряженными гиперболами**.

Замечание 2. **Эксцентриситетом** гиперболы называется отношение фокусного расстояния к действительной оси:

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (25)$$

Для любой гиперболы $\varepsilon>1$, это число определяет форму гиперболы.

Пример. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2-9y^2=144$.

Написать уравнение ее асимптот и вычислить эксцентриситет.

Решение. Напишем каноническое уравнение гиперболы, для этого обе части уравнения поделим на 144. После сокращения получим

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Отсюда видно, что $a^2=9$, т.е. $a=3$ и $b^2=16$, т.е. $b=4$.
Для гиперболы $c^2=a^2+в^2=16+9=25$, отсюда $c=5$.
Теперь можем написать координаты вершин и фокусов гиперболы:
$A_1(3,0)$, $A_2(-3,0)$, $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$.

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$, а уравнения асимптот имеют вид:

$$y=\frac{4}{3}x \text{ и } y=-\frac{4}{3}x.$$

4.5. Парабола

Парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выберем систему координат таким образом: за ось OX примем прямую, проходящую через фокус F перпендикулярно к директрисе, за положительное направление примем направление от директрисы к фокусу. За начало координат примем середину O отрезка от точки F до директрисы, длину которого обозначим через P и будем называть параметром параболы. Пусть M(x,y) произвольная точка, лежащая на параболе. Пусть точка N основание перпендикуляра, опущенного из M на директрису. По определению параболы MN=MF.

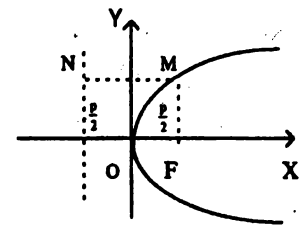


Рис. 30.

Из этого условия получаем каноническое уравнение параболы в выбранной системе координат

$$y^2=2px. \qquad (26)$$

Пусть $p>0$, исследуем форму параболы.

Из канонического уравнения параболы видно, что x не может принимать отрицательных значений, т.е. все точки параболы лежат справа от оси OY. Уравнение содержит переменную y в квадрате, значит парабола симметрична относительно оси OX, эта ось называется **осью** параболы. Точка O пересечения параболы с ее осью симметрии называется **вершиной** параболы. Для параболы, заданной уравнением (26), вершина совпадает с началом координат, а ось симметрии - с осью OX. График параболы имеет вид, изображенный на рис. 30.

Уравнение директрисы записывается в виде $x=-\frac{p}{2}$.

Замечание 1. При $p<0$ парабола располагается левее оси OY.
Замечание 2. Парабола
$x^2=2py$ (27)

имеет фокус $F(0,\frac{p}{2})$, директрису $y=-\frac{p}{2}$ и расположена над осью OX, если p>0, и под осью OX при p<0. Осью симметрии такой параболы является ось OY, а вершиной - начало координат.

Пример. Составить уравнение параболы и ее директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY, фокус находится в точке F(0;2), вершина совпадает с началом координат.

Решение. Будем искать уравнение параболы в виде $x^2=2py$.

По условию $\frac{p}{2}=2$, а значит p=4. Итак, искомое уравнение имеет вид: $x^2=8y$, уравнение ее директрисы: y=-2.

Глава IV. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§1. Плоскость

1.1. Уравнение плоскости

Пусть в декартовой системе координат в пространстве R^3 дана точка M_1, заданная радиус-вектором $\bar{r}_1\{x_1,y_1,z_1\}$. Зададим произвольный вектор $\bar{n}\{A,B,C\}\neq 0$. Запишем теперь уравнение плоскости P, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\bar{n}$.

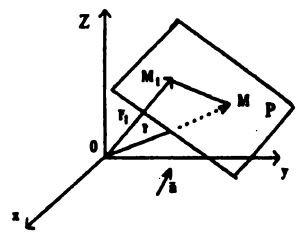


Рис. 31.

Пусть M(x,y,z) - любая точка плоскости с радиус-вектором $\bar{r}\{x,y,z\}$, тогда вектор $\vec{M_1M}=\bar{r}-\bar{r}_1$ (рис. 31) будет перпендикулярен вектору $\bar{n}$ и их скалярное произведение равно нулю

$$\bar{n}(\bar{r}-\bar{r}_1)=0 \qquad (1)$$

Это равенство будет справедливо для всех точек M, лежащих на плоскости P, и нарушается для точек, не принадлежащих плоскости. Итак, мы получили векторное уравнение плоскости P.

В координатной форме это уравнение имеет вид:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (2)$$

Вектор $\bar{n}(A,B,C)$ называется **нормальным вектором** к плоскости (2). Итак, уравнение (2) определяет уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\bar{n}$.

Если в уравнении (2) раскрыть скобки, мы получим уравнение первой степени относительно x, y, z

15 $Ax+By+Cz+D=0$, (3)

где $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$.

Итак, любая плоскость в пространстве определяется уравнением первой степени и является поверхностью первого порядка. Верно и обратное утверждение: любое уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет плоскость в пространстве.

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(-1,2,3) перпендикулярно вектору $\overline{OM}$.

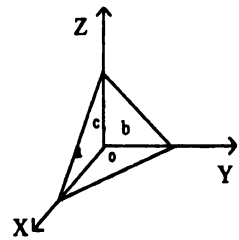


Рис. 32.

Решение. Вектор нормали $\bar{n} = \overline{OM} = \{-1,2,3\}$.

По формуле (2) имеем:

$-1(x+1)+2(y-2)+3(z-3)=0$ или

$-x+2y+3z-14=0$.

Умножая обе части равенства на -1, окончательно получим

$x-2y-3z+14=0$.

Замечание. Полезно запомнить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки длины a, b, c соответственно (рис. 32). Это уравнение называется уравнением плоскости в отрезках и имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (4)$$

17 ## 1.2. Угол между двумя плоскостями

Пусть даны уравнения двух плоскостей:

$A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$;

$A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$,

где $\bar{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\bar{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ - вектора нормали к этим плоскостям.

Углом между двумя плоскостями будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Очевидно, один из этих двугранных углов равен углу φ между векторами $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$.

Поэтому, согласно формуле (12) гл.II, угол между двумя плоскостями вычисляется по формуле:

18 $$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (5)$$

1.3. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Если плоскости перпендикулярны, то скалярное произведение векторов $\bar{n}_1$

и $\bar{n}_2$ равно нулю, т.е. $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$.

Переписав это условие в координатной форме, получаем условие перпендикулярности двух плоскостей:

$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$; (6)

Если же плоскости параллельны, то и векторы n_1 n_2 параллельны. Условие параллельности векторов дает нам условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (7)$$

§2. Прямая линия

2.1. Уравнение прямой в пространстве

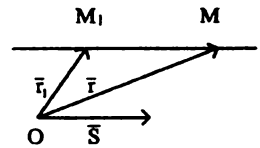


Рис. 33.

Пусть в заданной системе координат дана точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ с радиус-вектором $\bar{r}_1\{x_1, y_1, z_1\}$ и вектор $\bar{S}\{m,n,l\}$.

Через точку M_1 параллельно вектору $\bar{S}$ можно провести единственную прямую в пространстве (рис. 33). Найдем ее уравнение.

На искомой прямой возьмем произвольную точку M(x,y,z) с радиус-вектором $\overline{OM} = \bar{r}$, причем

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \overline{M_1 M}. \quad (8)$$

Вектор $\overline{M_1 M}$ коллинеарен вектору $\bar{S}$, а значит $\overline{M_1 M} = \lambda \bar{S}$, где λ - произвольный параметр ($\lambda \neq 0$).

Равенство (8) перепишем в виде:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \bar{S} \quad (9)$$

Уравнение (9) называется **векторным уравнением прямой линии**. Вектор $\bar{S}$ называется **направляющим** вектором прямой.

Векторное уравнение (9) можно записать в равносильной координатной форме:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda m; \\ y = y_1 + \lambda n; \\ z = z_1 + \lambda l. \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) называют **параметрическими уравнениями прямой линии**.

Из каждого равенства уравнений (10) можно выразить параметр

$$\lambda = \frac{x - x_1}{m}; \quad \lambda = \frac{y - y_1}{n}; \quad \lambda = \frac{z - z_1}{l}.$$

Приравнивая правые части, получим:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{l} \tag{11}$$

Уравнения (11) называют **каноническими уравнениями прямой линии.**

Уравнения (11) можно записать в виде системы двух уравнений, например,

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}\\[2ex] \dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{l}\end{cases} \tag{12}$$

Каждое уравнение этой системы является уравнением первой степени, а значит, определяет плоскость в пространстве.

Вообще, всякая линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей.

Таким образом, любая прямая вполне определяется пересечением плоскостей, проходящих через эту прямую. Эти плоскости можно задать их общими уравнениями

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \tag{13}$$

Уравнения (13) называются общими уравнениями прямой.

2.2. Взаимное расположение двух прямых

Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1};\ \overline{S}_1=\{m_1,n_1,l_1\};$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2};\ \overline{S}_2=\{m_2,n_2,l_2\}.$$

Очевидно, что за угол между этими прямыми можно принять угол между их направляющими векторами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$.

По формуле (5) имеем:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}} \tag{14}$$

Если две прямые параллельны, то коллинеарны их направляющие векторы.

Отсюда получаем условие **параллельности двух прямых**:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2} \qquad (15)$$

Условие перпендикулярности двух прямых следует из условия перпендикулярности их направляющих векторов:

$$m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2=0 \qquad (16)$$

2.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть дано уравнение прямой линии

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1}$$

и уравнение плоскости Ax+By+Cz+D=0.

$\bar{S}\{m,n,l\}$ - направляющий вектор прямой,

$\bar{a}\{A,B,C\}$ - нормальный вектор плоскости.

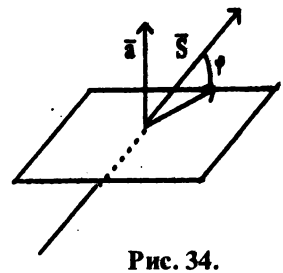


Рис. 34.

Очевидно (как видно из рис. 34), угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{S}$ равен $\frac{\pi}{2}-\varphi$, где φ - угол между прямой и плоскостью, а значит

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cl|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+l^2}} \qquad (17)$$

Здесь числитель взят по абсолютной величине, так как $\sin\varphi\geq 0$.

Равенство (17) определяет угол между прямой и плоскостью.

В случае параллельности прямой и плоскости векторы $\bar{a}$ и $\bar{S}$ ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю. Отсюда получим условие параллельности прямой и плоскости:

Am+Bn+Cl=0. (18)

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности векторов $\bar{a}$ и $\bar{S}$, т.е,

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l} \qquad (19)$$

Пример. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \text{ и } \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

Направляющие векторы этих прямых равны $\bar{S}_1\{1,-4,1\}$ и $\bar{S}_2\{2,-2,-1\}$. Следовательно,

$$\cos\varphi = \pm\frac{1\cdot 2+(-4)\cdot(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

отсюда

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ или } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И КОММЕНТАРИИ

Пример 1. Даны два вектора $\bar{a}\{1,1,-2\}$ и $\bar{b}\{2,-1,0\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=2\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

$X_c=2\times1-2=0;\ Y_c=2\times1-(-1)=3;\ Z_c=2\times(-2)-0=-4;$

$X_d=1+2=3;\ Y_d=1+(-1)=0;\ Z_d=-2+0=-2.$

Итак: $\bar{c}\{0,3,-4\}$, $\bar{d}\{3,0,-2\}$.

Вычислим модули этих векторов и их скалярное произведение:

$$|\bar{c}|=\sqrt{X_c^2+Y_c^2+Z_c^2}=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5;$$

$$|\bar{d}|=\sqrt{X_d^2+Y_d^2+Z_d^2}=\sqrt{3^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{13};$$

$$(\bar{c},\bar{d})=X_c\cdot X_d+Y_c\cdot Y_d+Z_c\cdot Z_d=0\cdot3+3\cdot0+(-4)\cdot(-2)=8.$$

Теперь можно вычислить косинус угла φ между этими векторами

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{c},\bar{d})}{|\bar{c}|\cdot|\bar{d}|}=\frac{8}{5\cdot\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{65}.$$

Пример 2. При каком значении α векторы $\bar{a}-\bar{b}$ и $\alpha\,\bar{a}+\bar{b}$ ортогональны? (Координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в примере 1).

Решение. Найдем координаты векторов $\bar{a}-\bar{b}$ и $\alpha\,\bar{a}+\bar{b}$:

$$\bar{a}-\bar{b}=\{1-2;1-(-1);-2-0\}=\{-1,2,-2\};$$

$$\alpha\,\bar{a}+\bar{b}=\{\alpha\cdot1+2;\alpha\cdot1+(-1);-2\cdot\alpha+0\}=\{\alpha+2,\alpha-1,-2\alpha\}.$$

Запишем условие ортогональности полученных векторов:

$-1(\alpha+2)+2(\alpha-1)+(-2)(-2\alpha)=0$ или

$-\alpha-2+2\alpha-2+4\alpha=0$. После преобразования получим $5\alpha-4=0$;

откуда $\alpha=\frac{4}{5}$.

Пример 3.

Даны координаты вершин треугольника A(0,-2), B(1,1), C(3,0). Написать общее уравнение медианы треугольника, опущенной из вершины B.

Решение. Найдем координаты точки M, середины основания AC.

$$X_M = \frac{X_A + X_C}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};\ Y_M = \frac{Y_A + Y_C}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1.$$

Напишем теперь уравнение прямой BM, проходящей через две точки B и M:

$$\frac{Y - Y_M}{Y_B - Y_M} = \frac{X - X_M}{X_B - X_M};\ \frac{Y-(-1)}{1-(-1)} = \frac{X-3/2}{1-3/2};\ \frac{Y+1}{2} = \frac{X-3/2}{-1/2}.$$

После элементарных преобразований имеем:

$$-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 2x - \frac{3}{2}\cdot 2 \text{ или } -y-1 = 4x-6, \text{ отсюда } 4x+y-5=0.$$

Получили искомое уравнение медианы.

Пример 4.

Даны три точки A(3,1), B(1,-2), C(3,4). Написать уравнение прямой, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AB.

Решение. Запишем уравнение прямой AB, проходящей через две точки A и B.

$$\frac{Y-1}{-2-1} = \frac{X-3}{1-3}, \text{ или } -2(y-1) = -3(x-3), \text{ отсюда } 2y-2 = 3x-9.$$

Разрешая это уравнение относительно переменной y, найдем уравнение прямой AB с угловым коэффициентом

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Угловой коэффициент этой прямой равен $K = \frac{3}{2}$.

Из условия перпендикулярности двух прямых получим угловой коэффициент K_1 прямой, перпендикулярной прямой AB:

$$K_1 = -\frac{1}{K} = -\frac{2}{3}.$$

Запишем теперь уравнение прямой с данным угловым коэффициентом K_1 и проходящей через точку C. Воспользуемся формулой $y - y_c = +K_1(x - x_c)$.

Отсюда $y - 4 = -\frac{2}{3}(x-3)$. После элементарных преобразований получаем

требуемое уравнение

$$y = -\frac{2}{3}x + 6.$$

Пример 5.

Дано уравнение второго порядка

$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$

Написать каноническое уравнение кривой и определить ее тип. Найти полуоси, координаты центра симметрии и фокусов кривой.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы привести данное уравнение к одному из следующих видов:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Первое из этих уравнений определяет эллипс, а второе - гиперболу с центром симметрии в точке $O(x_0,y_0)$, полуосями a, b (для гиперболы: a - вещественная полуось). Фокусы таких кривых имеют координаты: $F_1(x_0 + c, y_0)$ и $F_2(x_0 - c, y_0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$ (для эллипса, если a - большая полуось) и $c^2 = a^2 + b^2$ (для гиперболы).

Для решения поставленной задачи выделим полные квадраты в следующих выражениях:

$9x^2 - 36x = 9(x^2 - 4x + 4) - 36 = 9(x - 2)^2 - 36;$

$- 4y^2 - 8y = - 4(y^2 + 2y + 1) + 4 = - 4(y + 1)^2 + 4.$

Подставим теперь полученные выражения в данное уравнение:

$9(x - 2)^2 - 36 - 4(y + 1)^2 + 4 - 4 = 0$ или $9(x - 2)^2 - 4(y + 1)^2 = 36.$

Поделив обе части уравнения на 36, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Отсюда видно, что центр симметрии гиперболы находится в точке O(2,-1), прямые x-2=0, y+1=0 являются ее осями симметрии. Вещественная полуось гиперболы a=2, мнимая полуось b=3,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Получим координаты фокусов $F_1(2 + \sqrt{13}; -1)$, $F_2(2 - \sqrt{13}; -1)$.

Пример 6.

Дано уравнение кривой в декартовых координатах $(x^2 + y^2)^2 = 4xy^2$. Написать это уравнение в полярных координатах.

Решение. Воспользуемся формулами (гл. III, §1) $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ и подставим эти выражения в данное уравнение.

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = 4r\cos\varphi \cdot r^2(\sin\varphi)^2.$$

Используя формулы тригонометрии $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$,

$2\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\sin 2\varphi$, получим: $r^4=2r^3\sin 2\varphi\sin\varphi$. Поделим обе части на r^3 и получим искомое уравнение

$$r=2\sin 2\varphi\cdot\sin\varphi$$

Пример 7.

Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к прямой

$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{1}$ и проходящей через точку M(3,-1,2).

Решение. Из уравнения прямой выпишем направляющий вектор данной прямой $\bar{s}\{3,2,1\}$. Этот вектор будет вектором нормали искомой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0,y_0,z_0)$, с вектором нормали $\bar{n}\{A,B,C\}$ имеет вид: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Теперь легко запишем искомое уравнение

$3(x-3)+2(y+1)+1(z-2)=0$ или $3x-9+2y+2+z-2=0$.

Отсюда получим общее уравнение плоскости

$3x+2y+z-9=0$.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1.	Действия с векторами: a) Вычисление линейной комбинации векторов $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, где $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ - заданные векторы; b) Вычисление угла между двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$	1. Изучить основные операции с векторами, заданными в координатной форме 2. a)Вычислить координаты векторов $\alpha\bar{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$ и $\beta\bar{b} = \{\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2\}$ 3. a)Вычислить координаты вектора $\bar{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$, где $x_c = \alpha x_1 + \beta x_2$, $y_c = \alpha y_1 + \beta y_2$, $z_c = \alpha z_1 + \beta z_2$ 4. b)Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по формуле: $(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ 5. b)Вычислить длину вектора $\bar{a}$: $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ 6. b)Вычислить длину вектора $\bar{b}$: $\lvert\bar{b}\rvert = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ 7. b)Вычислить косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}$ 8. b)Выписать ответ: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}\right)$
2.	Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_1, y_1)$ a) параллельно прямой, проходящей через две точки $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$ b)перпендикулярно прямой, проходящей через две точки $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$	1. Изучить основные способы задания прямой на плоскости 2. a)Написать уравнение прямой AB, проходящей через точки A и B по формуле: $\dfrac{x - x_a}{x_b - x_a} = \dfrac{y - y_a}{y_b - y_a}$ 3. a)Записать полученное уравнение в виде $y = k_1 x + b_1$ 4. a)Использовать условие параллельности двух прямых и найти угловой

№ п/п	Умение	Алгоритмы
	c) вычислить длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(x_1,y_1)$ на прямую AB	коэффициент прямой , параллельной прямой AB: $k=k_1$ 5. a)Написать уравнение прямой a, проходящей через точку M; $y=k_1(x-x_1)+y_1$ 6. b)Использовать условие перпендикулярности двух прямых и найти угловой коэффициент прямой: $k_1k=-1$ или $k=-\frac{1}{k_1}$ 7. b)Написать уравнение прямой: $y=-\frac{1}{k_1}(x-x_1)+y_1$ 8. c)Выписать совместно уравнения прямых AB и перпендикулярной. 9. c)Найти решение полученной системы (x_2,y_2). Это координаты точки N пересечения прямой AB и перпендикуляра. 10. Найти длину отрезка MN: $\lvert MN\rvert=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
3.	Определить тип кривой второго порядка по заданному общему уравнению. Выписать ее параметры.	1. Ознакомиться с каноническими уравнениями кривых второго порядка. 2. Выделить полные квадраты независимых переменных. 3. Преобразовать уравнение к одному из следующих видов: a) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$ b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$ c) $1^0(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ или $2^0(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ 4. Определить тип кривой: если уравнение привели к виду a) – эллипс; к виду b) – гипербола; к виду c) – парабола. 5. Выписать параметры кривой из ее уравнения. Для эллипса и гиперболы:

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		a) полуоси a и b; b) расстояние между фокусами 2c, где $c^2 = a^2 - b^2$ (для эллипса, если a – большая полуось) и $c^2 = a^2 + b^2$ (для гиперболы) c) координаты (x_0,y_0) центра симметрии. Для параболы: a) координаты вершины (x_0,y_0); b) координаты фокуса: $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$ в случае C1^0, $F(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$ в случае C2^0
4.	Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ a) параллельно данной плоскости Ax+By+Cz+D=0 b) перпендикулярно прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$	1. Освоить различные способы задания плоскости в пространстве 2. Выписать координаты вектора нормали данной плоскости: $\bar{n} = \{A,B,C\}$. В силу параллельности двух плоскостей этот вектор будет вектором нормали для искомой плоскости (a) 3. Написать уравнение искомой плоскости (a): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 4. Выписать координаты направляющего вектора данной прямой: $\bar{s} = \{l,m,n\}$. Этот вектор является вектором нормали для искомой плоскости (b) 5. Написать уравнение плоскости (b): $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$
5.	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ a) имеющий направляющий вектор $\bar{s} = \{l,m,n\}$ b) перпендикулярной плоскости Ax+By+Cz+D=0 c) проходящей через	1. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ с направляющим вектором $\bar{s} = \{l,m,n\}$: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 2. Выписать координаты вектора нормали для данной плоскости: $\bar{n} = \{A,B,C\}$. Этот вектор является направляющим для прямой, перпендикулярной к данной

№ п/п	Умение	Алгоритмы
	две точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$	плоскости 3. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\bar{n}$: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$ 4. Вычислить координаты вектора M_0M_1: $M_0M_1=\{x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0\}$ 5. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором M_0M_1: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Даны векторы $\bar{a}=\{1,-2,1\}$ и $\bar{a}=\{2,-6,3\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=3\bar{a}-\bar{b}$ и $\bar{b}$.

РЕШЕНИЕ

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Изучить основные операции с векторами, заданными в координатной форме	
2а.	Вычислить координаты вектора $3\bar{a}$ и $-\bar{b}$	$3\bar{a}=\{3,-6,3\}$ $-\bar{b}=\{-2,6,-3\}$
3а.	Вычислить координаты вектора $\bar{c}=3\bar{a}-\bar{b}$	$\bar{c}=\{1,0,0\}$
4.	Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{c}$ и $\bar{b}$	$(\bar{c},\bar{b})=1\cdot 2+0\cdot(-6)+0\cdot 3=2$
5.	Вычислить длину вектора $\bar{c}$	$\lvert\bar{c}\rvert=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$
6.	Вычислить длину вектора $\bar{b}$	$\lvert\bar{b}\rvert=\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}=7$
7.	Вычислить косинус угла между векторами $\bar{c}$ и $\bar{b}$.	$\cos\varphi=\frac{2}{1\cdot 7}=\frac{2}{7}$
8.	Выписать ответ	$\varphi=\arccos(\frac{2}{7})$

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Даны векторы $\bar{a}=\{1,0,2\}$ и $\bar{b}=\{3,-1,1\}$. Найти косинус угла между векторами $\bar{c}=3\bar{a}-2\bar{b}$ и $\bar{b}$.

Задание 2

Найти косинус угла между векторами $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{a}$, где $\bar{a} = \{1,0,2\}$, $\bar{b} = \{3,-1,1\}$.

Задание 3

При каком значении α векторы $\bar{a} - \alpha\bar{b}$ и $\bar{a} + \alpha\bar{b}$ ортогональны (угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$)? Векторы $\bar{a} = \{1,0,3\}$ и $\bar{b} = \{3,-1,1\}$.

Задание 4

Найти угол между векторами $\bar{c} = -\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b}$, если $\bar{a} = \{0,1,3\}$, $\bar{b} = \{1,1,3\}$.

Задание 5

Вычислить угол между векторами $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b}$, если $\bar{a} = \{1,1,1\}$, $\bar{b} = \{-2,0,1\}$.

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание

Даны вершины треугольника A(1,-1), B(0,2), C(3,1). Составить уравнения высоты AD и прямой, проходящей через вершину A, параллельно стороне BC. Вычислить длину высоты AD.

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Изучить основные способы задания прямой на плоскости	
2a.	Написать уравнение прямой BC, проходящей через точки B(0,2) и C(3,1)	$\frac{x-0}{3-0}=\frac{y-2}{1-2}$
3a.	Записать полученное уравнение в виде $y=k_1x+b_1$	$y=-\frac{1}{3}x+2$
4a.	Использовать условие параллельности двух прямых и найти угловой коэффициент прямой, параллельной BC	$k=-\frac{1}{3}$
5a.	Написать уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно стороне BC	$y=-\frac{1}{3}(x-1)-1$ или $y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$
6b.	Использовать условие перпендикулярности двух прямых и найти угловой коэффициент высоты AD	$k_B=-\frac{1}{k}$ $k_B=3$
7.	Написать уравнение высоты AD	y=3(x-1)-1 или y=3x-4
8.	Выписать совместно уравнения прямых AD и BC	$\begin{cases} y=-\frac{1}{3}x+2 \\ y=3x-4 \end{cases}$
9.	Найти решение системы уравнений – координаты точки D	$x=\frac{9}{5};\ y=\frac{7}{5}$
10.	Найти длину высоты AD	$\lvert AD\rvert=\sqrt{\left(1-\frac{9}{5}\right)^2+\left(-1-\frac{7}{5}\right)^2}$ $\lvert AD\rvert=\frac{4\sqrt{10}}{25}$

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Даны вершины треугольника A(2,-2), B(3,-5), C(5,7). Составьте уравнение высоты BD, вычислите ее длину.

Задание 2

Составить уравнение всех сторон треугольника ABC, где A(3,2), B(5,-2) и C(5,2). Найти их длины.

Задание 3

Составить уравнения всех высот треугольника с вершинами A(3,2), B(5,-2) и C(1,0). Найти длины высот.

Задание 4

Через точки A(1,-2) и B(5,4) проведена прямая. Составить уравнения прямых, проходящих через точку C(-2,0) перпендикулярно и параллельно прямой AB. Вычислить расстояние от точки C до прямой AB.

Задание 5

Даны координаты вершин прямоугольной трапеции A(5,-1), C(7,3), D(9,-1) с основаниями AD и BC. Написать уравнения всех сторон трапеции. Вычислить ее высоту.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Написать каноническое уравнение кривой $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

Определить тип кривой, выписать ее параметры.

РЕШЕНИЕ

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Ознакомиться с каноническими уравнениями кривых второго порядка	
2.	Выделить полные квадраты независимых переменных	$9x^2-54x=9(x^2-6x+9)-81=$ $=9(x-3)^2-81$ $-16y^2-64y=-16(y^2+4y+4)+64=$ $=-16(y+2)^2+64$
3.	Преобразовать уравнение	$9(x-3)^2-81-16(y+2)^2+64-$ $-127=0$ или $9(x-3)^2-16(y+2)^2=144$ отсюда $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ или $\frac{(x-3)^2}{4^2}-\frac{(y+2)^2}{3^2}=1$ (случай b)
4.	Определить тип кривой	гипербола
5.	Выписать параметры кривой	1. Действительная полуось a=4, мнимая полуось b=3 2. $c^2=a^2+b^2=16+9=25$, c=5. Расстояние между фокусами 2c=10 3. Центр симметрии C(3,-2) 4. Координаты фокусов $F_2(x_0+c,y_0), F_2(8,-2)$, $F_1(x_0-c,y_0), F_1(-2,-2)$.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ эллипс

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \to x^2+y^2=a^2$ окр.

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Привести к каноническому виду и определить тип кривой $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

Задание 2

Привести к каноническому виду уравнение кривой $y^2-6y-16x+25=0$. Определить ее тип и вычислить основные параметры.

Задание 3

Привести к каноническому виду уравнение кривой $4x^2+16x-y^2+18y-49=0$. Определить ее тип, вычислить основные параметры.

Задание 4

Привести к каноническому виду уравнение кривой $x^2+8x-9y-29=0$. Определить ее тип, вычислить основные параметры.

Задание 5

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$. Определить тип кривой, вычислить основные параметры.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку $M_0(1,-3,2)$

а) параллельно плоскости $3x+2y-z-1=0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

РЕШЕНИЕ

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Освоить различные способы задания плоскости в пространстве	
2.	Выписать координаты вектора нормали данной плоскости	$\bar{n}=\{3,2,-1\}$
3.	Написать уравнение плоскости, параллельной данной, и проходящей через точку M_0	$3(x-1)+2(y+3)-1(z-2)=0$ или $3x+2y-z+5=0$
4.	Выписать координаты направляющего вектора данной прямой	$\bar{s}=\{3,-1,0\}$
5.	Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через точку M_0	$3(x-1)-1(y+3)+0(z-2)=0$ или $3x-y-6=0$ Плоскость параллельна OZ

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

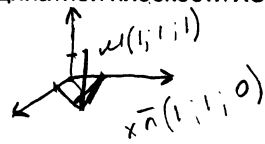
Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,5,-2)$ и параллельной плоскости x-2y+5z=0.

Задание 2

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,2,0)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$

Задание 3

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1,1,1)$ и параллельной координатной плоскости XOY.



$1(x-1)+1(y-1)+0(z-1)=0$

$x-1+y-1=0$

$x+y-2=0$

Задание 4

Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярной прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

$4x-y+z=0$

Задание 5

Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1,0,1)$, перпендикулярной оси OY.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1,2,1)$ и

a) имеющей направляющий вектор $\bar{s}=\{2,1,1\}$;

b) перпендикулярной плоскости 3x-y-2z+1=0;

c) проходящей через точку M_0 и $M_1(3,2,4)$

РЕШЕНИЕ

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из содержания данного упражнения.

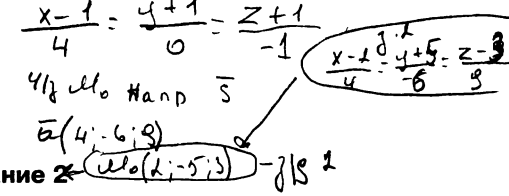
если что не понятно на ейр. ик.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\bar{s}$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$
2.	Выписать координаты вектора нормали для данной плоскости	$\bar{n}=\{3,-1,-2\}$
3.	Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\bar{n}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$
4.	Вычислить координаты вектора $\vec{M_0M_1}$	$\vec{M_0M_1}=\{3-(-1),2-2,4-1\}$ $\vec{M_0M_1}=\{4,0,3\}$
5.	Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{M_0M_1}$	$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{3}$ Прямая перпендикулярна оси OY

Решите самостоятельно следующие задания:

Задание 1

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,-1,1)$, имеющей направляющий вектор $\bar{s}=\{4,0,-1\}$.



Задание 2

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,-5,3)$, параллельную прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z+3}{9}$.

Задание 3

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,3,-1)$ перпендикулярно к плоскости x+4y-3z=0

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-3}$$

Задание 4

Даны вершины треугольника A(4,1,-2), B(2,0,0), C(-2,3,-5). Составить уравнения его сторон.

Задание 5

Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(3,-2,4) на плоскость 5x+3y-7z+1=0

$$\bar{n}(5;3;-7)$$

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-7}$$

Задание 6

Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A(1,2,-1) на плоскость XOY.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

Самостоятельно решите следующие задачи (для отработки методов решения задач воспользуйтесь приложением 1):

√ 1. Найти скалярное произведение $(\bar{a}, 2\bar{b} - 3\bar{a})$.

2. При каком значении α векторы $\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{b} - \alpha\,\bar{a}$ ортогональны?

3. Для прямой M_1M_2 написать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и общее уравнение. Начертить график прямой.

№	$\bar{a}$	$\bar{b}$	M_1	M_2
1	{1,2,0}	{0,-1,2}	{-2,1}	{6,-2}
2	{1,2,-1}	{0,-1,1}	{3,-1}	{1,4}
3	{0,2,1}	{1,1,0}	{3,3}	{-1,4}
4	{1,0,1}	{0,2,1}	{1,0}	{-2,-4}
5	{2,1,0}	{1,0,1}	{1,4}	{-2,-3}
6	{0,1,-1}	{2,2,-1}	{0,-3}	{2,1}
7	{2,-1,0}	{0,-1,-1}	{-3,0}	{-6,1}
8	{0,1,1}	{1,1,0}	{2,-2}	{1,0}
9	{1,0,1}	{3,2,1}	{4,6}	{-5,-1}
10	{0,1,-2}	{3,2,-1}	{4,-1}	{6,0}
11	{1,0,-1}	{2,3,-1}	{2,3}	{-4,-3}
12	{2,1,1}	{0,1,-1}	{2,2}	{-1,6}
13	{0,2,2}	{3,1,2}	{-6,2}	{4,0}
14	{1,1,1}	{0,1,2}	{-1,-2}	{-3,-5}
15	{0,-1,-2}	{1,-4,-2}	{4,-2}	{6,0}
16	{1,2,0}	{0,-1,2}	{-2,5}	{6,-2}
17	{1,2,-1}	{0,-1,1}	{3,-1}	{1,4}
18	{0,2,1}	{1,1,0}	{3,3}	{-1,4}
19	{1,0,1}	{0,2,1}	{1,0}	{-2,-4}
20	{2,1,0}	{1,0,1}	{1,4}	{-2,-3}
21	{0,1,-1}	{2,2,-1}	{0,-3}	{2,1}
22	{2,-1,0}	{0,-1,-1}	{-3,0}	{-6,1}
23	{0,1,1}	{1,1,0}	{2,-2}	{1,0}
24	{1,0,1}	{3,2,1}	{4,6}	{-5,-1}
25	{0,1,-2}	{3,2,-1}	{4,-1}	{6,0}
26	{1,0,-1}	{2,3,-1}	{2,3}	{-4,-3}
27	{2,1,1}	{0,1,-1}	{2,2}	{-1,6}
28	{0,2,2}	{3,1,2}	{-6,2}	{4,0}
29	{1,1,1}	{0,1,2}	{-1,-2}	{-3,-5}
30	{0,-1,-2}	{1,-4,-2}	{4,-2}	{6,0}

4. В треугольнике $M_0M_1M_2$ найти уравнение медианы, высоты, проведенных из вершины M_0, а также уравнение средней линии EF, параллельной основанию M_1M_2.

Вычислить длину найденной высоты.

Координаты точек M_0, M_1, M_2 заданы в таблице:

№	M_0	M_1	M_2
1	(3,2)	(-2,5)	(6,-2)
2	(-2,6)	(3,-1)	(1,4)
3	(2,5)	(3,3)	(-1,4)
4	(2,-3)	(1,0)	(-2,-4)
5	(5,3)	(1,4)	(-2,-3)
6	(-1,-2)	(0,-3)	(2,1)
7	(1,5)	(-3,0)	(-6,1)
8	(-3,-5)	(2,-2)	(1,0)
9	(1,1)	(4,6)	(-5,-1)
10	(3,2)	(4,-1)	(6,0)
11	(5,-5)	(2,3)	(-4,-3)
12	(1,4)	(2,2)	(-1,6)
13	(2,-3)	(-6,2)	(4,0)
14	(2,6)	(-1,-2)	(-3,-5)
15	(-1,2)	(4,-2)	(6,0)
16	(3,2)	(-2,5)	(6,-2)
17	(-2,6)	(3,-1)	(1,4)
18	(2,5)	(3,3)	(-1,4)
19	(2,-3)	(1,0)	(-2,-4)
20	(5,3)	(1,4)	(-2,-3)
21	(-1,-2)	(0,-3)	(2,1)
22	(1,5)	(-3,0)	(-6,1)
23	(-3,-5)	(2,-2)	(1,0)
24	(1,1)	(4,6)	(-5,-1)
25	(3,2)	(4,-1)	(6,0)
26	(5,-5)	(2,3)	(-4,-3)
27	(1,4)	(2,2)	(-1,6)
28	(2,-3)	(-6,2)	(4,0)
29	(2,6)	(-1,-2)	(-3,-5)
30	(-1,2)	(4,-2)	(6,0)

5. По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой, начертить ее график. Найти координаты фокусов, вершин и центра (для центральной кривой).

Варианты заданий:

1) $x^2+y^2-4x+6y=0$
2) $x^2+y^2+6x-4y=0$
3) $4x^2+4y^2-12x+4y+3=0$

4) $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$
5) $4x^2 + 36y^2 + 72y - 16x - 92 = 0$
6) $9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y + 49 = 0$
7) $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$
8) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$
9) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
10) $36x^2 - 4y^2 - 72x + 16y - 88 = 0$
11) $9y^2 - 4x^2 + 16x + 18y + 29 = 0$
12) $x^2 - y^2 - 4y = 0$
13) $7x^2 - 2y^2 - 42x - 16y + 17 = 0$
14) $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$
15) $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$
16) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
17) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$
18) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0$
19) $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$
20) $4x^2 + 36y^2 + 72y - 16x - 92 = 0$
21) $9x^2 + 4y^2 + 54x + 8y + 49 = 0$
22) $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$
23) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$
24) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$
25) $36x^2 - 4y^2 - 72x + 16y - 88 = 0$
26) $9y^2 - 4x^2 + 16x + 18y + 29 = 0$
27) $x^2 - y^2 - 4y = 0$
28) $7x^2 - 2y^2 - 42x - 16y + 17 = 0$
29) $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$
30) $-x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$

6. Преобразовать к полярным координатам уравнение линии. Варианты заданий:

1) $(x^2 + y^2)^2 = 20x^3$
2) $(x^2 + y^2)^2 = 8y^3$
3) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
4) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
5) $(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$
6) $(x^2 + y^2)^2 = -2y^3$
7) $(x^2 + y^2)^2 = -4x^3$
8) $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
9) $(x^2 + y^2)^3 = x^4$
10) $(x^2 + y^2)^3 = y^4$
11) $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$
12) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
13) $(x^2 + y^2)^3 = 8yx^3$
14) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy^3$
15) $(x^2 + y^2)^3 = -16xy^3$
16) $(x^2 + y^2)^2 = 20x^3$
17) $(x^2 + y^2)^2 = 8y^3$
18) $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$
19) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$
20) $(x^2 + y^2)^2 = 16(y^2 - x^2)$
21) $(x^2 + y^2)^2 = -2y^3$
22) $(x^2 + y^2)^2 = -4x^3$
23) $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
24) $(x^2 + y^2)^3 = x^4$
25) $(x^2 + y^2)^3 = y^4$
26) $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$
27) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$
28) $(x^2 + y^2)^3 = 8yx^3$
29) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy^3$
30) $(x^2 + y^2)^3 = -16xy^3$

МАТЕМАТИКА
Базовый курс
ЮНИТА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор Н.М. Пилипенко
Оператор компьютерной верстки И.Ю. Маслова

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998 Сдано в печать 24.05.2001 г.
НОУ "Современный Гуманитарный Институт"
Тираж 42000. Заказ 1819.

Современный Гуманитарный Университет
Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК